1532052

No. of Printed Pages : 8

MTE-09

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2019

(Elective Course Mathematics)

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*
(Weightage : 70%)

Note *: Attempt* ***five*** *questions in all. Question No. 1 is* ***compulsory.*** *Answer any* ***four*** *questions out of the Question Nos. 2 to 7.*

---

1. Are the following statements true *or* false ? Give reasons for your answers : 5×2

   (a) The set $S = \{3n : n \in \mathbf{N}\}$ is compact.

   (b) If $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, then the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent.

   (c) If a continuous function, $f : [c, d] \to \mathbf{R}$ changes sign in $[c, d]$, then $f(x) = 0$ for some x in this interval.

(d) The function $f(x) = 2x^2 + 3 \mid x - 2 \mid$ is differentiable at $x = -1$.

(e) The necessary condition for a function f to be integrable is that it is continuous.

2. (a) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^4 + x^4}$ is uniformly convergent for all real values of x. 4

(b) Find the intervals in which the function f defined by $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 13$, $\forall\, x \in \mathbf{R}$ is increasing or decreasing. 3

(c) Test for the convergence of the series : 3

$$\frac{1}{3.5} + \frac{\sqrt{3}}{5.8} + \frac{\sqrt{5}}{7.11} + \ldots\ldots .$$

3. (a) Using the principle of induction, show that $3^{2(n+1)} - 8n - 9$ is divisible by 64 for all $n \in \mathbf{N}$. 4

(b) Show that the function $f(x) = x^3$ is not uniformly continuous on $\mathbf{R}$. Does there exist a subset of $\mathbf{R}$ such that f restricted to it is uniformly continuous in it ? Justify your choice. 4

(c) Check that every subsequence of the sequence $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ is convergent or not. 2

4. (a) Use Cauchy's root test to examine the convergence or divergence of the series : 4

$$\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1}+\left(\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3}+\ldots\ldots .$$

(b) Represent the number $3+\sqrt{5}$ on the real line. 3

(c) Find the value of $m \in \mathbf{R}$ for which $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)(2x-3)(2-3x)}{4-x+mx^3}$ exists. Also find the limit. 3

5. (a) Prove that : 5

$$e^{2x}=1+2x+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^3x^3}{3!}+\ldots.$$

$$+\frac{2^nx^n}{n!}+\ldots. \ \forall\, x\in\mathbf{R}.$$

(b) Show that : 5

$$L(P_2, f) \le U(P_1, f),$$

where $f(x)=3x+2$ defined over $[0, 1]$ and

$$P_1=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}$$

and $$P_2=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}.$$

6. (a) Show that the function f given by : 4

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^4} \forall x \in]3, 4]$$

is continuous but not bounded in]3, 4].

(b) Is the function $f : [2, 3] \to \mathbf{R}$ defined by $f(x) = 2x + e^x$ one-one ? Is it onto ? Justify. 3

(c) Test the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{3}{4}\right)^2}$ using the integral test. 3

7. (a) Evaluate : 4

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{3n} \frac{n^2}{(2n + r)^3}$$

(b) If : 4

$$\lim_{x \to 0} \frac{a \sin x - x(1 - b \cos x)}{x^3}$$

exists for some a and b is equal to $\frac{1}{6}$, then find $a : b$.

(c) Write the inequality $-5 \leq x - \frac{3}{2} \leq 1$ in the modulus form. 2

एम.टी.ई-09

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2019

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम-गणित)

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

भारिता : 70%

नोट : *कुल* **पाँच** *प्रश्न कीजिए। प्र. सं. 1 अनिवार्य है। प्र. सं. 2 से 7 में से किन्हीं* **चार** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

---

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं **या** असत्य ? अपने उत्तरों के कारण बताइए : 5×2

   (क) समुच्चय $S = \{3n : n \in \mathbf{N}\}$ संहत है।

   (ख) यदि $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, तब श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ अभिसारी है।

   (ग) यदि संतत फलन $f : [c, d] \to \mathbf{R}$, $[c, d]$ में अपना चिन्ह बदलता है, तब इस अंतराल में किसी x के लिए $f(x) = 0$।

(घ) फलन $f(x) = 2x^2 + 3|x-2|$, $x = -1$ पर अवकलनीय है।

(ङ) फलन f के समाकलनीय होने के लिए अनिवार्य प्रतिबन्ध है कि वह संतत हो।

2. (क) दिखाइए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^4 + x^4}$, x के सभी वास्तविक मानों के लिए एकसमानतः अभिसारी है। 4

(ख) वे अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 13, \quad \forall x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन f वर्धमान या ह्रासमान है। 3

(ग) श्रेणी की अभिसरण की जाँच कीजिए : 3

$$\frac{1}{3.5} + \frac{\sqrt{3}}{5.8} + \frac{\sqrt{5}}{7.11} + \ldots\ldots$$

3. (क) आगमन सिद्धान्त द्वारा दिखाइए कि सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए $3^{2(n+1)} - 8n - 9$, 64 से भाज्य है। 4

(ख) दिखाइए कि फलन $f(x) = x^3, \mathbf{R}$ पर एकसमानतः संतत नहीं है। क्या $\mathbf{R}$ के ऐसे उपसमुच्चय का अस्तित्व होता जिस पर f एकसमानतः संतत है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(ग) जाँच कीजिए कि अनुक्रम $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ का प्रत्येक उपअनुक्रम अभिसारी होता है या नहीं। 2

4. (क) कॉशी मूल परीक्षण द्वारा निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण या अपसरण की जाँच कीजिए : 4

$$\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1}+\left(\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3}+\ldots\ldots$$

(ख) संख्या $3+\sqrt{5}$ को वास्तविक रेखा पर निरूपित कीजिए। 3

(ग) $m \in \mathbf{R}$ का ऐसा मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(2x-3)(2-3x)}{4-x+mx^3}$ का अस्तित्व होता है। सीमा भी ज्ञात कीजिए। 3

5. (क) सिद्ध कीजिए कि : 5

$$e^{2x}=1+2x+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^3x^3}{3!}+\ldots.$$
$$+\frac{2^nx^n}{n!}+\ldots. \forall\, x \in \mathbf{R}$$

(ख) दिखाइए कि : 5

$$L(P_2, f) \leq U(P_1, f),$$

जहाँ $f(x)=3x+2$, $[0, 1]$ पर परिभाषित है और $P_1=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}$ और $P_2=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1\right\}$

6. (क) दर्शाइए कि $f(x) = \frac{1}{(x-3)^4} \forall x \in]3, 4]$ द्वारा परिभाषित फलन f, $]3, 4]$ में संतत है लेकिन परिबद्ध नहीं है। 4

(ख) क्या $f(x) = 2x + e^x$ द्वारा परिभाषित फलन $f : [2, 3] \to \mathbf{R}$ एकैकी है? क्या यह आच्छादी है? पुष्टि कीजिए। 3

(ग) समाकल परीक्षण का प्रयोग करते हुए श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{3}{4}\right)^2}$ के अभिसरण की जाँच कीजिए। 3

7. (क) $\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{3n} \frac{n^2}{(2n + r)^3}$ का मूल्यांकन कीजिए। 4

(ख) यदि किसी a और b के लिए : 4

$$\lim_{x \to 0} \frac{a \sin x - x(1 - b \cos x)}{x^3}$$

का अस्तित्व है और यह $\frac{1}{6}$ के बराबर है, तब $a : b$ ज्ञात कीजिए।

(ग) मापांक रूप में असमता $-5 \leq x - \frac{3}{2} \leq 1$ लिखिए। 2