

1528592

No. of Printed Pages : 8

MTE-08

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

June, 2019

(ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS)

MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS;

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 50

*Note : Question No. 1 is compulsory. Attempt any
four questions from the remaining questions.*

Use of calculators is not allowed.

1. State whether the following statements are True or False. Justify your answer with help of a short proof or a counter example. No marks will be awarded without justification. 2×5
- (a) $\alpha(x \, dy + 2y \, dx) = xy \, dy$ is an exact differential equation.
- (b) The differential equation $y = 2xp + y^2p^3$ is of first order and first degree.
- (c) The complementary function of the differential equation :

$$(D^2 + DD' - 6D'^2)z = y \cos x$$

is $\phi_1(y - 2x) + \phi_2(y + 3x)$.

(A-40) P. T. O.

- (d) A particular integral of the equations

$$y'' - 2y' = e^x \sin x \text{ is } \frac{1}{2} e^x \sin x.$$

- (e) The partial differential equation :

$$(x^2 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

is hyperbolic for all (x, y) outside the circle $x^2 + y^2 = 1$.

2. (a) The half life of radioactive cobalt is 5.27 years. Suppose that a nuclear accident left the level of cobalt radiation in a certain region at 100 times the level acceptable for human life. How long will it take until the region is again livable ? 4

- (b) Solve : 4

$$(2x e^y e^4 + 2xy^3 + y) dx + (x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 3x) dy = 0$$

- (c) Find a particular integral of : 2

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = x e^x \sin x$$

3. (a) Using the method of variation of parameters, solve the equation : 3

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 4e^x$$

- (b) Solve : 4

$$x dy - \{y + xy^3(1 + \ln x)\} dx = 0$$

- (c) Examine the following system of p. d. e.'s for compatibility : 3

$$p^2 + q^2 - 1 = 0; (p^2 + q^2)x - pz = 0$$

4. (a) Solve : 4

$$(3D^2 - 2D'^2 + D - 1)z = 4e^{x+y} \cos(x+y)$$

- (b) Solve : 3

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{3x}$$

- (c) Solve : 3

$$(x^2z - y^3)dx + 3xy^2dy + x^3dz = 0$$

5. (a) Using the method of undetermined coefficients, solve the equation : 3

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 2e^x + \cos x$$

- (b) Solve : 5

$$\frac{dx}{y(x+y) + az} = \frac{dy}{x(x+y) - az}$$

$$= \frac{dz}{z(x+y)}$$

- (c) Solve : 2

$$(D^2 + D + D')z = 0$$

6. (a) Solve the equation :

3

$$x \frac{dy}{dx} = y + xe^{y/x}$$

subject to $y(1) = 1$.

- (b) Solve :

2

$$(D^2 - \alpha^2 D'^2) z = x$$

- (c) Using Charpit's method, solve :

5

$$p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 1 = 0$$

7. (a) Using Lagrange's method, solve the differentiable equation :

4

$$(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$$

- (b) Solve the Laplace equation :

6

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

satisfying the boundary condition :

(i) $\phi = 0$ when $y \rightarrow \infty$

(ii) $\phi = 0$ when $x = 0$

(iii) $\phi = 0$ when $x = 1$

(iv) $\phi = x(1-x)$ when $y = 0, 0 < x < 1$.

एम. टी. ई.-08

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2019

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम. टी. ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

नोट : प्रश्न क्र. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य।
संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। बिना पुष्टि के कोई अंक नहीं दिए जाएंगे। 2×5

(क) समीकरण $a(x dy + 2y dx) = xy dy$ एक यथातथ अवकल समीकरण है।

(ख) अवकल समीकरण $y = 2xp + y^2 p^3$, प्रथम घात और प्रथम कोटि समीकरण है।

(ग) अवकल समीकरण :

$$(D^2 + DD' - 6D'^2)z = y \cos x$$

का पूरक फलन $\phi_1(y - 2x) + \phi_2(y + 3x)$ है।

(घ) समीकरण $y'' - 2y' = e^x \sin x$ का एक विशेष

हल $\frac{1}{2} e^x \sin x$ है।

(ङ) आंशिक अवकल समीकरण :

$$(x^2 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ के बाहर सभी (x, y) के लिए अतिपरवल्यिक है।

2. (क) रेडियोएक्टिव कोबाल्ट का अर्ध-जीवन 5.27 वर्ष है। एक क्षेत्र में न्यूक्लियर दुर्घटना के कारण कोबाल्ट विकिरण स्तर मानव जीवन को स्वीकार्य स्तर का 100 गुना हो गया। क्षेत्र को दोबारा रहने लायक बनने में कितना समय लगेगा ? 4

(ख) हल कीजिए : 4

$$(2x e^y e^4 + 2xy^3 + y) dx + (x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 3x) dy = 0$$

(ग) समीकरण : 2

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = x e^x \sin x$$

का विशेष हल प्राप्त कीजिए।

3. (क) प्राचल विचरण विधि द्वारा समीकरण : 3

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4e^x$$

का हल प्राप्त कीजिए।

- (ख) हल कीजिए : 4

$$x dy - \{y + xy^3(1 + \ln x)\} dx = 0$$

- (ग) जाँच कीजिए कि आंशिक अवकल

$$\text{समीकरण } p^2 + q^2 - 1 = 0; (p^2 + q^2)$$

$$x - pz = 0 \text{ सुसंगत है।} \quad 3$$

4. (क) हल कीजिए : 4

$$(3D^2 - 2D'^2 + D - 1)z = 4e^{x+y} \cos(x+y)$$

- (ख) हल कीजिए : 3

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{3x}$$

- (ग) हल कीजिए : 3

$$(x^2z - y^3) dx + 3xy^2 dy + x^3 dz = 0$$

5. (क) अनिर्धारित गुणांक-विधि द्वारा समीकरण : 3

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 2e^x + \cos x$$

का हल प्राप्त कीजिए।

- (ख) हल कीजिए : 5

$$\frac{dx}{y(x+y) + az} = \frac{dy}{x(x+y) - az} = \frac{dz}{z(x+y)}$$

- (ग) हल कीजिए : 2

$$(D^2 + D + D')z = 0$$

6. (क) समीकरण :

3

$$x \frac{dy}{dx} = y + xe^{y/x}$$

जहाँ $y(1) = 1$ का हल प्राप्त कीजिए।

(ख) हल कीजिए :

2

$$(D^2 - a^2 D'^2) z = x$$

(ग) चार्पिट विधि द्वारा समीकरण :

5

$$p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 1 = 0$$

का हल प्राप्त कीजिए।

7. (क) लैग्रान्ज विधि द्वारा समीकरण :

4

$$(x^2 - y^2 - z^2)p + 2xyq = 2xz$$

को हल कीजिए।

(ख) प्रतिबन्धों :

6

(i) $\phi = 0$ जब $y \rightarrow \infty$

(ii) $\phi = 0$ जब $x = 0$

(iii) $\phi = 0$ जब $x = 1$

(iv) $\phi = x(1-x)$ जब $y = 0, 0 < x < 1$

को संतुष्ट करने वाले लाप्लास समीकरण :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

का हल प्राप्त कीजिए।