No. of Printed Pages : 8 **MTE-07**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2019

04352

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is* ***compulsory****. Attempt any* ***four*** *questions out of the remaining questions. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

1. State whether the following statements are *true* or *false*. Give a short proof or a counter example in support of your answer. *5×2=10*

(a) The domain of the function

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 5y}{x - y} \text{ is } \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

(b) $(\ln x)^{\frac{1}{x-1}}$ is in the 1^∞ form as $x \to 1$.

(c) The function

$$F(x, y) = (y^2 + 2xy, x^2 + 2yx)$$

is conservative.

(d) A function $f(x, y)$ has all the directional derivatives at (a, b) implies that f is differentiable at (a, b).

(e) The region between the parabolas $y^2 = 4x$ and $x^2 = 4y$ is Type-II only.

2. (a) Evaluate the following limits : *6*

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

(b) Find a pair of non-negative integers, whose sum is 70 and the product is maximum, using the method of Lagrange's multipliers. *4*

3. (a) Show that the simultaneous limit of the following functions exist at $(0, 0)$: *4*

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{y} + y \cos \dfrac{1}{x}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

(b) Evaluate

$$\int_C 4x^2y \, dx + 2y \, dy,$$

where C is the boundary of the rectangle with vertices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ and $(0, 2)$

(i) by direct method

(ii) by Green's theorem. *6*

4. (a) Evaluate the following by converting to cylindrical coordinates : 5

$$\iiint_W \frac{z}{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz,$$

where

$$W = \left\{(x, y, z) : 1 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 3, \ 1 \le z \le 4\right\}$$

(b) Consider the function $F(x, y) = 2x - ln \, xy - y$. Show that there exists a unique continuously differentiable function g defined by $F(x, g(x)) = 0$ in the neighbourhood of $x = 2$ such that $g(2) = \frac{1}{2}$. Find $g'(2)$. 3

(c) Let $x = e_1 + 2e_2 - 5e_3$, $y = 2e_1 + 4e_2 + 9e_3$, where e_1, e_2, e_3 are unit vectors in $\mathbf{R}^3$. Find $|x|$ and $|y|$. 2

5. (a) State Schwarz theorem and verify Schwarz theorem for the following function at the point (0, 1) : 4

$$f(x, y) = 2e^{3y} \cos x + e^x \sin 2y$$

(b) Does the function F defined by $F(x, y) = |x| + |y|$ have Taylor's expansion at the point (1, 1) ? If so, obtain the Taylor polynomial for this function at (1, 1). 4

(c) For the transformation $(r, \theta) \to (x, y)$ given by $x = r \cos \theta$, $y = r \cos \theta + \sin \theta$ $(r \ne 0)$, find $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$. 2

6. (a) If

$$z = \tan^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y}\right),$$

then show that $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\sin 2z.$ *3*

(b) Suppose S and T are subsets of $\mathbf{R}^3$, where S is the unit sphere with centre at the origin and T is the open cube

$$T = \{f(x, y, z) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1, -1 < z < 1\}.$$

Which of the following is true ? Justify your answer. *3*

(i) $S \subset T$

(ii) $T \subset S$

(c) Locate and classify the stationary points of the function $f(x, y) = 4xy + x^4 - y^4$. *4*

7. (a) Find the volume of the solid S whose base in the xy-plane is the region bounded by $y = 2 - x^2$ and $y = x$ while the top is bounded by the plane $z = x + 4$. *5*

(b) Let $w(x, y) = x^2y$, where $x(u, v) = uv$ and $y(u, v) = u^2v^3$. Find $\frac{\partial w}{\partial v}$ *5*

(i) by expressing the composite function in terms of u and v and taking partial derivatives.

(ii) by using the chain rule.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2019

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 1* ***अनिवार्य*** *है । शेष प्रश्नों में से किन्हीं* **चार** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *है ।*

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । अपने उत्तर के पक्ष में लघु उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए । *5×2=10*

(क) फलन

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 5y}{x - y}$$ का प्रांत $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ है ।

(ख) $x \to 1$ होने पर $(ln\, x)^{\frac{1}{x-1}}$, 1^{∞} प्रकार का होगा ।

(ग) फलन $F(x, y) = (y^2 + 2xy, x^2 + 2yx)$ संरक्षी है ।

(घ) यदि (a, b) पर फलन f(x, y) के सभी दिक्-अवकलज होते हैं, तब (a, b) पर f अवकलनीय होते हैं ।

(ङ) परवलय $y^2 = 4x$ और $x^2 = 4y$ के बीच का प्रदेश केवल प्रकार-II का होता है ।

2. (क) निम्नलिखित सीमाओं का मूल्यांकन कीजिए : *6*

(i) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

(ii) $$\lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

(ख) लग्रांज गुणांक विधि से ऐसे ऋणेतर पूर्णांकों का युग्म ज्ञात कीजिए जिसका योगफल 70 और गुणनफल उच्चिष्ठ हो । *4*

3. (क) दिखाइए कि (0, 0) पर निम्नलिखित फलन की युगपत् सीमा का अस्तित्व है : *4*

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$$

(ख) (i) प्रत्यक्ष विधि (ii) ग्रीन प्रमेय द्वारा

$$\int_C 4x^2 y \, dx + 2y \, dy$$ का मूल्यांकन कीजिए,

जहाँ C, शीर्षों (0, 0), (1, 0), (1, 2) और (0, 2) वाली आयत की सीमा है । *6*

4. (क) निम्नलिखित को बेलनाकार निर्देशांकों में परिवर्तित करके इनका मूल्यांकन कीजिए : 5

$$\iiint_W \frac{z}{1+x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz,$$

जहाँ

$$W = \left\{(x, y, z) : 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 3,\ 1 \le z \le 4\right\}$$

(ख) फलन $F(x, y) = 2x - ln\, xy - y$ लीजिए । दिखाइए कि $x = 2$ के प्रतिवेश में $F(x, g(x)) = 0$ द्वारा परिभाषित ऐसे अद्वितीय संतत: अवकलनीय फलन g का अस्तित्व होता है जिसके लिए $g(2) = \frac{1}{2}$. $g'(2)$ ज्ञात कीजिए । 3

(ग) मान लीजिए

$x = e_1 + 2e_2 - 5e_3$, $y = 2e_1 + 4e_2 + 9e_3$, जहाँ e_1, e_2, e_3, $\mathbf{R}^3$ में एकक सदिश हैं । $|x|$ और $|y|$ ज्ञात कीजिए । 2

5. (क) श्वार्ज़ प्रमेय का कथन दीजिए और बिंदु (0, 1) पर निम्नलिखित फलन के लिए श्वार्ज़ प्रमेय को सत्यापित कीजिए : 4

$$f(x, y) = 2e^{3y} \cos x + e^x \sin 2y$$

(ख) क्या $F(x, y) = |x| + |y|$ द्वारा परिभाषित फलन F का बिन्दु (1, 1) में टेलर प्रसार होता है ? यदि होता है, तो (1, 1) पर इस फलन का टेलर बहुपद प्राप्त कीजिए । 4

(ग) $x = r \cos \theta$, $y = r \cos \theta + \sin \theta$ $(r \ne 0)$ द्वारा दिए गए रूपांतरण $(r, \theta) \to (x, y)$ के लिए $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$ ज्ञात कीजिए । 2

6. (क) यदि $z = \tan^{-1}\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x + y}\right)$,

तब दिखाइए कि $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\sin 2z.$ 3

(ख) मान लीजिए S और T, $\mathbf{R}^3$ के उपसमुच्चय हैं, जहाँ S मूल-बिंदु पर केन्द्र वाला एकक गोला है और T विवृत घन

$$T = \{f(x, y, z) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1, -1 < z < 1\}$$

है । बताइए कि निम्नलिखित में से कौन-सा सत्य है । अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 3

(i) $S \subset T$

(ii) $T \subset S$

(ग) फलन $f(x, y) = 4xy + x^4 - y^4$ के स्तब्ध बिंदु पता लगाइए और उसे वर्गीकृत कीजिए । 4

7. (क) घनाकृति S का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका आधार xy-समतल में $y = 2 - x^2$ और $y = x$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश है, जबकि ऊपरी भाग समतल $z = x + 4$ द्वारा परिबद्ध है । 5

(ख) मान लीजिए $w(x, y) = x^2y$, जहाँ $x(u, v) = uv$ और $y(u, v) = u^2v^3$ । $\dfrac{\partial w}{\partial v}$ ज्ञात कीजिए 5

(i) u और v के पदों में संयुक्त फलन को व्यक्त करते हुए और आंशिक अवकलज लेते हुए ।

(ii) शृंखला नियम से ।