No. of Printed Pages : 8

MTE-06

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2019

06452

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. **7** is **compulsory**. Answer any **four** questions from questions no. **1** to **6**. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. (a) Let G be the set of all 3×3 non-singular matrices with entries from **Q**. Let X be a fixed matrix in G. Prove that the operation $*$ defined by : $A * B = X^{-1} ABX$, is a binary operation on G. Also check whether or not G is a group with respect to this binary operation. *3*

(b) Consider the matrix ring $\mathbf{M}_3(\mathbf{Z})$, the ring of all 3×3 matrices with entries from the set of integers $\mathbf{Z}$. *7*

(i) Give an example, with justification, of an element of $\mathbf{M}_3(\mathbf{Z})$ that is a unit but not the identity element.

(ii) Give a non-zero element of $\mathbf{M}_3(\mathbf{Z})$ that is a zero divisor but not nilpotent, with justification.

(iii) Write a non-zero nilpotent element of $\mathbf{M}_3(\mathbf{Z})$, with justification.

(iv) Give a non-zero function from $\mathbf{M}_3(\mathbf{Z})$ to $\mathbf{Z}$.

2. (a) Prove that every element of the group $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ is of finite order. *4*

(b) Show that if $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ is a ring homomorphism, then $f(x) = x$ for all $x \in \mathbf{Q}$. *6*

3. (a) Let R be a commutative ring with identity. Let I and J be ideals of R such that $I + J = R$. Show that $IJ = I \cap J$. *4*

(b) Find the number of normal subgroups of order 25 and of order 50 of a group of order 75. *3*

(c) Decide if $x^4 + 5$ is irreducible in $\mathbf{Q}[x]$ or not. Further, check whether $x^4 + \bar{5}$ is irreducible in $\mathbf{Z}_5[x]$ or not. *3*

4. (a) Consider the ideal

$$I = \langle x^2 - 4x + 3,\ x^3 + 3x^2 - x - 3 \rangle \text{ of the ring } \mathbf{Q}[x].$$

Find a polynomial p such that $I = \langle p \rangle$. Is $\mathbf{Q}[x]/I$ a field ? Give reasons for your answer. *3*

(b) Write the permutation (3 5 7) (1 3 5) (5 7) as a product of disjoint cycles. Is this permutation even ? Give reasons for your answer. *3*

(c) Show that if G is a non-cyclic group of order n, then G has no element of order n. Further, give an example, with justification, of a non-cyclic group all of whose proper subgroups are cyclic. *4*

5. (a) Show that

$$d : \mathbf{Q}[x] \setminus \{0\} \to \mathbf{N} \cup \{0\} : d(f) = 2^{\deg f}$$

is a Euclidean valuation on $\mathbf{Q}[x]$. *4*

(b) Prove that $\mathbf{R}^5/\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{R}^3$. *6*

6. (a) Give an example each, with justification, to show that : *4*

(i) The cartesian product of two integral domains need not be an integral domain

(ii) All finite fields are not isomorphic.

(b) Let G be a group and H be a non-empty finite subset of G. If $ab \in H \ \forall \ a, b \in H$, prove that H is a subgroup of G. Will the result be true if H is not finite ? Justify your answer. *6*

7. State whether the following statements are *true* or *false*. Further, give reasons for your answers in the form of a short proof or a counter-example. *10*

(i) If A and B are two sets such that $A \subseteq B$, then $A \cup B = B$.

(ii) Any cyclic group is of prime order.

(iii) The cosets of $\langle (1 \quad 2) \rangle$ in S_3 form a group with respect to multiplication of cosets.

(iv) If $I = 4\mathbf{Z}$ and $J = 6\mathbf{Z}$, then $I + J = 10\mathbf{Z}$.

(v) $\langle x^2 \rangle$ is a prime ideal of the polynomial ring $\mathbf{Z}[x]$.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2019

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 7 करना **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. (क) मान लीजिए G, उन सभी 3×3 व्युत्क्रमणीय आव्यूहों का समुच्चय है जिनकी प्रविष्टियाँ $\mathbf{Q}$ से हैं । मान लीजिए X, G का एक दिया हुआ आव्यूह है । सिद्ध कीजिए कि $A * B = X^{-1} ABX$ से परिभाषित संक्रिया $*$, G पर एक द्विआधारी संक्रिया है । साथ ही, यह भी जाँच कीजिए कि इस द्विआधारी संक्रिया के सापेक्ष G एक समूह है या नहीं । *3*

(ख) आव्यूह वलय $\mathbf{M}_3(\mathbf{Z})$, उन सभी 3×3 आव्यूहों का वलय है जिनकी प्रविष्टियाँ पूर्णांक समुच्चय $\mathbf{Z}$ से हैं, पर ग़ौर कीजिए । 7

(i) $\mathbf{M}_3(\mathbf{Z})$ के एक ऐसे अवयव का, पुष्टि सहित, उदाहरण दीजिए जो मात्रक हो लेकिन तत्समक अवयव नहीं हो ।

(ii) $\mathbf{M}_3(\mathbf{Z})$ के एक ऐसे शून्येतर अवयव का, पुष्टि सहित, उदाहरण दीजिए जो शून्य का भाजक हो लेकिन शून्यंभावी नहीं हो ।

(iii) $\mathbf{M}_3(\mathbf{Z})$ का एक शून्येतर शून्यंभावी अवयव, पुष्टि सहित, लिखिए ।

(iv) $\mathbf{M}_3(\mathbf{Z})$ से $\mathbf{Z}$ तक एक शून्येतर फलन दीजिए ।

2. (क) सिद्ध कीजिए कि समूह $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ का प्रत्येक अवयव परिमित कोटि का है । 4

(ख) दिखाइए कि यदि $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ एक वलय समाकारिता है, तो सभी $x \in \mathbf{Q}$ के लिए, $f(x) = x$. 6

3. (क) मान लीजिए R एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय है । मान लीजिए I और J, R की ऐसी गुणजावलियाँ हैं कि $I + J = R$. दिखाइए कि $IJ = I \cap J$. 4

(ख) कोटि 75 वाले एक समूह के, कोटि 25 वाले और कोटि 50 वाले प्रसामान्य उपसमूहों की संख्या ज्ञात कीजिए । 3

(ग) निर्णय कीजिए कि $x^4 + 5$, $\mathbf{Q}[x]$ में अखण्डनीय है या नहीं । आगे, जाँच कीजिए कि $x^4 + \bar{5}$, $\mathbf{Z}_5[x]$ में अखण्डनीय है या नहीं । 3

4. (क) वलय $\mathbf{Q}[x]$ की गुणजावली

$I = \langle x^2 - 4x + 3, x^3 + 3x^2 - x - 3 \rangle$ पर ग़ौर कीजिए ।

एक ऐसा बहुपद p ज्ञात कीजिए कि $I = \langle p \rangle$. क्या $\mathbf{Q}[x]/I$ एक क्षेत्र है ? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए । 3

(ख) क्रमचय (3 5 7) (1 3 5) (5 7) को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में लिखिए । क्या यह क्रमचय सम है ? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए । 3

(ग) दिखाइए कि यदि G कोटि n वाला एक अचक्रीय समूह है, तो G में कोटि n वाला कोई भी अवयव नहीं होगा । आगे, एक ऐसे अचक्रीय समूह का, पुष्टि सहित, उदाहरण दीजिए जिसके सभी उचित उपसमूह चक्रीय हों । 4

5. (क) दिखाइए कि

$$d : \mathbf{Q}[x] \setminus \{0\} \to \mathbf{N} \cup \{0\} : d(f) = 2^{\deg f}$$

$\mathbf{Q}[x]$ पर एक यूक्लिडीय मानांकन है । 4

(ख) सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{R}^5/\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{R}^3$. 6

6. (क) निम्नलिखित के लिए पुष्टि सहित, एक-एक उदाहरण दीजिए ज़ो दर्शाता हो कि : 4

(i) यह ज़रूरी नहीं है कि दो पूर्णांकीय प्रांतों का कार्तीय गुणनफल भी एक पूर्णांकीय प्रांत हो ।

(ii) सभी परिमित क्षेत्र तुल्यकारी नहीं हैं ।

(ख) मान लीजिए G एक समूह है और H, G का एक अरिक्त परिमित उपसमुच्चय है । यदि $ab \in H \ \forall \ a, b \in H$ है, तो सिद्ध कीजिए कि H, G का उपसमूह है । क्या यह परिणाम तब भी सत्य होगा, यदि H परिमित न हो ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *6*

7. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । आगे, अपने उत्तरों के लिए, लघु-उपपत्ति या प्रत्युदाहरण के रूप में कारण दीजिए । *10*

(i) यदि A और B ऐसे दो समुच्चय हैं कि $A \subseteq B$, तो $A \cup B = B$.

(ii) कोई भी चक्रीय समूह अभाज्य कोटि का होता है ।

(iii) S_3 में $\langle (1 \;\; 2) \rangle$ के सहसमुच्चयों का समुच्चय, सहसमुच्चयों के गुणन के सापेक्ष, एक समूह है ।

(iv) यदि $I = 4\mathbf{Z}$ और $J = 6\mathbf{Z}$, तो $I + J = 10\mathbf{Z}$.

(v) $\langle x^2 \rangle$ बहुपद वलय $\mathbf{Z}(x)$ की एक अभाज्य गुणजावली है ।