No. of Printed Pages : 14 **MTE-04/MTE-05**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination, 2019

00002

MATHEMATICS

MTE-04 : ELEMENTARY ALGEBRA

Time : 1½ Hours] **[Maximum Marks : 25**

[Weightage : 70%

Instructions :

MTE-04 : ELEMENTARY ALGEBRA

&

MTE-05 : ANALYTICAL GEOMETRY

1. Students registered for both MTE-04 & MTE -05 courses should answer both the question papers in two separate answer books entering their enrolment number, course code and course title clearly on both the answer books.

2. Students who have registered for MTE-04 or MTE-05 should answer the relevant question paper after entering their enrolment number, course code and course title on the answer book.

Note : Question no. 5 is compulsory. Answer any three from question no. 1 to 4. Use of calculator is not allowed.

1. (a) If a, b and c are roots of the equation $x^3 + qx + r = 0$, give a polynomial whose roots are b^2c^2, c^2a^2, a^2b^2, and whose coefficients are given in terms of q and r. [3]

(b) For any two sets A and B in a universal set U, check whether or not [2]

$$A \times B \subseteq (A \cup B) \times (A \cap B)$$

2. (a) Show that : [2]

$(1 + w - w^2)^3 - (1 - w + w^2)^3 = 0$, where w is a cube root of unity.

(b) Show that : [3]

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

3. (a) Using the principle of mathematical induction, prove that n^3+2n is divisible by 3 for all $n \in \underset{\sim}{N}$ [3]

(b) Apply Weierstrass' inequality to prove that : [2]

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\prod_{i=2}^{n} \sqrt{i} - 1\right) + 2\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}\right)$$

4. (a) A company has two types of almonds, 750 kg of type - I and 1200 kg of type - II. These are to be mixed and packed into two types of packets of 1 kg each, economy pack and special pack. The economy pack consists of type - I and type - II nuts in the proportion 1 : 3. The special pack combines the type - I and type - II nuts in equal proportions. Find the number of economy and special packs. [2½]

(b) Find all the 5th roots of (5-i). [2½]

5. Which of the following statements are true and which are false ? Give a short proof or a counter example to justify your answer : [10]

(a) For any two finites sets A and B in a universal set U, $|A \cup B| = |(A \cup B)^C|$ where |A| denotes the number of elements in A.

(b) If $a^2 + b^2 + c^2 = 5$ and $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, then $|ax + by + cz| \leq 7$ where a, b, c, x, y, z $\in$ R

(c) Any consistent linear system of equation can be solved by Cramer's rule.

(d) For any n $\in$ N,

$$\cos^n \theta - \sin^n \theta = \frac{1}{2^n}(\cos 2n\theta + i \sin 2n\theta)$$

(e) If a real polynomial f(x) is divided by x - a, a $\in$ R, then the remainder is f(a).

----- x -----

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा, 2019

गणित

एम.टी.ई.-04 : प्रारंभिक बीजगणित

समय : 1½ घण्टे **अधिकतम अंक : 25**

(कुल का : 70%)

निर्देश :

एम.टी.ई.-04 : प्रारंभिक बीजगणित

एवं

एम.टी.ई.-05 : वैश्लेषिक ज्यामिति

1. जो छात्र एम.टी.ई.- 04 और एम.टी.ई.- 05 दोनों पाठ्यक्रमों के लिये पंजीकृत हैं, दोनों प्रश्न-पत्रों के उत्तर अलग-अलग उत्तर पुस्तिकाओं में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ-साफ लिखकर दें।

2. जो छात्र एम.टी.ई.- 04 या एम.टी.ई.- 05 किसी एक के लिये पंजीकृत हैं, अपने उसी प्रश्नपत्र के उत्तर पुस्तिका में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ-साफ लिखकर दें।

नोट : प्रश्न संख्या 5 करना जरूरी है। प्रश्न संख्या 1 से 4 तक में से कोई तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. (क) यदि a, b और c समीकरण $x^3 + qx + r = 0$ के मूल हैं तो एक ऐसा बहुपद दीजिए, जिसके मूल b^2c^2, c^2a^2, a^2b^2 हैं और जिसके गुणांक q और r के पदों में हैं। [3]

(ख) एक समष्टीय समुच्चय U में किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिये, जाँच कीजिए कि : [2]

$A \times B \subseteq (A \cup B) \times (A \cap B)$ या नहीं।

2. (क) दर्शाइये कि : [2]

$(1 + w - w^2)^3 - (1 - w + w^2)^3 = 0$, जहाँ w, 1 का एक घनमूल है।

(ख) दर्शाइये कि : [3]

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

3. (क) गणितीय आगमन के नियम का प्रयोग करते हुये सिद्ध कीजिए कि सभी $n \in N$ के लिये n^3+2n, 3 द्वारा विभाज्य है। [3]

(ख) $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\prod_{i=2}^{n} \sqrt{i} - 1\right) + 2\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}\right)$ सिद्ध

करने के लिये, वायर्स्ट्रास की असमिकाओं का प्रयोग कीजिए। [2]

4. (क) किसी कम्पनी के पास दो प्रकार के बादाम हैं, प्रकार-I के 750kg और प्रकार-II के 1200kg। इनको मिलाकर दो प्रकार के 1kg के पैकिटों में डाला जाता है- इकॉनमी (economy) पैकिट और विशिष्ट पैकिट। इकॉनमी पैकिट में प्रकार-I और प्रकार-II के बादामों को 1 : 3 के अनुपात में डाला जाता है। विशिष्ट पैकिट में प्रकार-I और प्रकार-II के बादामों को समान अनुपातों में डाला जाता है। इकॉनमी पैकिटों और विशिष्ट पैकिटों की संख्याएं ज्ञात कीजिये। [2½]

(ख) (5-i) के सभी पाँचवें मूल ज्ञात कीजिए। [2½]

5. निम्नलिखित में से कौन से कथन **सत्य** हैं तथा कौन से **असत्य** हैं ? एक संक्षिप्त उपपत्ति या एक प्रति उदाहरण देकर अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए:

(क) एक समष्टीय समुच्चय U में किन्हीं दो परिमित समुच्चयों A और B के लिये $|A \cup B| = |(A \cup B)^C|$ है, जहाँ |A| समुच्चय में अवयवों की संख्या व्यक्त करता है।

(ख) यदि $a^2 + b^2 + c^2 = 5$ और $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ तो $|ax + by + cz| \leq 7$ होगा जहाँ a, b, c, x, y, z $\in$ R.

(ग) रैखिक समीकरणों के किसी भी संगत निकाय को क्रेमर नियम से हल किया जा सकता है।

(घ) किसी $n \in N$ के लिये,

$$\cos^n \theta - \sin^n \theta = \frac{1}{2^n}(\cos 2n\theta + i \sin 2n\theta)$$

(ङ) यदि किसी वास्तविक बहुपद f(x) को x - a, $a \in R$ से भाग दिया जाए तो शेषफल f(a) होता है।

------x------

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination, 2019

MATHEMATICS

MTE-05 : ANALYTICAL GEOMETRY

Time : 1½ Hours] **[Maximum Marks : 25**

[Weightage : 70%

Note : Question no. 5 is compulsory. Answer any three from question no. 1 to 4. Use of calculator is not allowed.

1. (a) Find the equation of the conic with focus (1, 0), eccentricity $\frac{3}{2}$ and $x + y = 0$ as its directrix. [2]

(b) Find the equation of the plane passing through the lines $\frac{x+4}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ and $\frac{x}{2} = y - 1 = z$. [3]

2. (a) Check whether the plane $2x + y - z = 2$ cuts the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0$ or not. [2]

(b) Trace the conicoid $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$. [3]

3. (a) Find the equation of the cylinder passing through the curve : [3]

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

$x + y + z = 1$

(b) Check the symmetry of the curve :

$\frac{1}{x^2}+y^2=a(x^3+y^3)$, $a \in \mathbb{R}$ about the coordinate axes and the origin. [2]

4. (a) Find the centre of the conicoid $3x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + x + 2z = 0$. What will be the new equation if the origin is shifted to the centre ? [3]

(b) Find the equation of the sphere which has (1, -1, 0) and (3, 3, 2) as the ends of its diameter. [2]

5. Which of the following statements are true and which ones are false ? Give reasons for your answer : [5×2=10]

(a) The triple $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ represents the direction cosines of a line.

(b) The equation x = z represents a line in three dimensional space.

(c) A tangent plane to a cone touches it at only one point.

(d) The normals at the points (4a, -4a) and (4a, 4a) are perpendicular to each other.

(e) The projection of the line segment joining (1, 1, 0) and (-1, 2, 3) on the line :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{4}$$ is 9.

------x------

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा, 2019

गणित

एम.टी.ई.-05 : वैश्लेषिक ज्यामिति

समय : 1½ घण्टे अधिकतम अंक : 25

(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न संख्या 5 करना जरूरी है। प्रश्न संख्या 1 से 4 तक में से कोई तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

---

1. (क) नाभि (1, 0), उत्केन्द्रता $\frac{3}{2}$ और नियता $x + y = 0$ वाले शांकव का समीकरण ज्ञात कीजिए। [2]

(ख) रेखाओं $\frac{x+4}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ और $\frac{x}{2} = y - 1 = z$ से गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए। [3]

2. (क) जाँच कीजिए कि समतल $2x + y - z = 2$ गोले $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = 0$ को काटता है या नहीं। [2]

(ख) शांकवज $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$ को आरेखित कीजिए। [3]

3. (क) वक्र $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 1$ से गुजरने वाले बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए। [3]

(ख) निर्देशांक अक्षों और मूल बिन्दु के सापेक्ष वक्र $\frac{1}{x^2}+y^2=a(x^3+y^3)$, $a \in \mathbb{R}$ की सममिति की जाँच कीजिए। [2]

4. (क) शांकवज $3x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + x + 2z = 0$ का केन्द्र ज्ञात कीजिए। यदि इसके मूलबिन्दु को इस केन्द्र पर स्थानान्तरित कर दिया जाए, तो नया समीकरण क्या होगा ? [2]

(ख) उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी व्यास के सिरे (1, -1, 0) और (3, 3, 2) हैं। [3]

5. निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य ? अपने उत्तरों के कारण बताइए : [5×2=10]

(क) त्रिक $-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ रेखा की दिक्कोज्याओं को निरूपित करता है।।

(ख) समीकरण $x = z$ त्रिविम समष्टि में रेखा को निरूपित करता है।

(ग) किसी शंकु का स्पर्श तल उसे केवल एक बिन्दु पर ही स्पर्श करता है।

(घ) बिन्दुओं (4a, -4a) और (4a, 4a) पर अभिलम्ब परस्पर लंब होते हैं।

(ङ) (1, 1, 0) और (-1, 2, 3) को मिलाने वाले रेखाखण्डों का रेखा $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{4}$ पर प्रक्षेप 9 है।

------x------