1523572

No. of Printed Pages : 12 **MTE-02**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2019

(ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS)

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 Hours *Maximum Marks : 50*

Weightage : 70%

Note : *Question No. 7 is* **compulsory**. *Attempt any* **four** *questions from Question Nos. 1 to 6. Use of calculators is* **not** *allowed.*

---

1. (a) Show that :

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

is a subspace of $\mathbf{R}^3$. Find a basis of W and then extend that basis to a basis of $\mathbf{R}^3$. Further, check whether the subspace

$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\}$ of $\mathbf{R}^3$ is the same as W or not. Also, find dim $(W \cap X)$. 7

(b) Let $\{u, v, w\}$ be an orthonormal set of vectors in $\mathbf{R}^3$. Show that they are linearly independent over **R**. Check whether $u - v$, $u + v$, w are orthogonal over **R** or not. 3

2. (a) Let $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ be given by :

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3).$$

Prove that T is a linear transformation. Also find the rank and nullity of T. 3

(b) Can the following system of linear equations be solved by Cramer's rule ? If yes, apply the rule to solve it. If the rule is not applicable use the Gaussian elimination method to solve the system : 4

$$3x + 2y = 3$$

$$2x + 3y = 2 - 4z$$

$$5x + 7y = 5$$

(c) Find the radius of the circular section of the sphere $|r| = 9$ by the plane $r.(2i - j - k) = 9$. 3

3. (a) Let $T = \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ be a linear transformation given by :

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1, x_1 - x_2).$$

Show that {(1,1), (1, 0)} and {(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)} are bases of $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$ respectively. Find the matrix of T with respect to these ordered bases. 5

(b) Using the Gram-Sohmidt procedure find an orthonormal set of vectors corresponding to the ordered basis B = {(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)} of $\mathbf{R}^3$. Also find a basis dual to B. 5

4. (a) Obtain a solution set for the linear system : 5

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$-2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 5 = 0$$

(b) Check whether or not the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

is diagonalisable. If it is find a matrix P so that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix. If A is not diagonalisable, obtain its minimal polynomial. 5

5. (a) Obtain the adjoint of the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Hence obtain A^{-1}. 5

(b) Reduce the quadratic form $5x^2 - 4xy + 8y^2$ to its orthogonal canonical form, clearly giving the transformations being used. Also give a rough sketch of the curve representing this canonical form. 5

6. (a) Let A be an $n \times n$ matrix, $n \geq 2$. Let $S = \{B \in M_n(R) \mid BA = AB\}$. Show that S satisfies all the axioms for being a real vector space with respect to addition and

scalar multiplication of matrices. Further, show that the dimension of S over R is greater than one. 8

(b) Give a relation on Z which is transitive but not symmetric. Justify your answer. 2

7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer either with a short proof or with a counter-example : 10

(i) The sum of two invertible matrices is an invertible matrix.

(ii) The minimal polynomial of an $n \times n$ matrix is of degree n.

(iii) If A is a unitary matrix, then all its eigen values are 1.

(iv) If A, B, C are three subsets of a universal set U, then :

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C).$$

(v) Given any $n \in \mathrm{N}$, it is possible to define a linear transformation whose kernel has dimension n.

एम. टी. ई.-02

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी. डी. पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2019

(ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित)

एम. टी. ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

भारित 70%

नोट : *प्रश्न संख्या 7* ***अनिवार्य*** *है। प्रश्न संख्या 1 से 6 में से कोई चार प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।*

---

1. (क) दिखाइए कि :

$$W = \left\{\left(x_1, x_2, x_3\right) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$$

$\mathbf{R}^3$ की एक उपसमष्टि है। W का आधार ज्ञात कीजिए और इसके बाद उस आधार को $\mathbf{R}^3$ के आधार तक विस्तारित कीजिए। इसके आगे जाँच कीजिए कि $\mathbf{R}^3$ उपसमष्टि $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\}$ W के समान है या नहीं। $\dim(W \cap X)$ भी ज्ञात कीजिए। 7

(ख) मान लीजिए $\{u, v, w\}$ $\mathbf{R}^3$ में सदिशों का प्रसामान्य लांबिक समुच्चय है। दिखाइए कि वे $\mathbf{R}$ पर रैखिकत: स्वतंत्र हैं। जाँच कीजिए कि $u - v$, $u + v$, w $\mathbf{R}$ पर लांबिक हैं या नहीं। 3

2\. (क) मान लीजिए :

$$T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3)$$

द्वारा परिभाषित हैं। सिद्ध कीजिए कि T एक रैखिक रूपान्तरण हैं। T की जाति और शून्यता भी ज्ञात कीजिए। 3

(ख) क्या निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय के क्रैमर नियम से हल किया जा सकता है ? यदि हाँ, इस नियम से इसे हल कीजिए। यदि नहीं तो गाउसीय निराकरण विधि द्वारा इस निकाय को हल कीजिए : 4

$$3x + 2y = 3$$
$$2x + 3y = 2 - 4z$$
$$5x + 7y = 5$$

(ग) गोले $|r| = 9$ की समतल $r.(2i - j - k) = 9$ से किए गए वृत्तीय परिच्छेद की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। 3

3. (क) मान लीजिए कि $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1, x_1 - x_2)$ द्वारा परिभाषित रैखिक रूपांतरण है। दिखाइए कि $\{(1,1)(1,0)\}$ और $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$, क्रमशः $\mathbf{R}^2$ और $\mathbf{R}^3$ के आधार हैं। इन क्रमित आधारों के सापेक्ष T का आव्यूह ज्ञात कीजिए। 5

(ख) ग्राम–श्मिट प्रक्रिया द्वारा $\mathbb{R}^3$ के क्रमित आधार $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ के संगत का प्रसामान्य लांबिक सदिशों का समुच्चय ज्ञात कीजिए। B का द्वैत आधार भी ज्ञात कीजिए। 5

4. (क) रैखिक निकाय का हल समुच्चय प्राप्त कीजिए : 5

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$-2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 - 5 = 0$$

(ख) जाँच कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ विकर्णनीय है या नहीं। यदि है तो, ऐसा आव्यूह P ज्ञात कीजिए जिसके लिए $P^{-1} AP$ विकर्ण आव्यूह है। यदि यह विकर्णनीय नहीं है, तो इसका न्यूनतम बहुपद प्राप्त कीजिए। 5

5\. (क) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ का सहखंडज ज्ञात कीजिए। इस तरह A^{-1} प्राप्त कीजिए। 5

(ख) द्विघाती समघात $5x^2 - 4xy + 8y^2$ को इसकी लांबिक विहित समघात तक समानीत कीजिए। स्पष्ट रूप से यह भी बताइए कि इसमें किन रूपान्तरणों का प्रयोग किया गया। इस विहित समघात को निरूपित करने वाले वक्र का स्थूल (rough) आरेख भी दीजिए। 5

6\. (क) मान लीजिए A एक $n \times n$ आव्यूह है, जहाँ $n \geq 2$। मान लीजिए :

$$S = \{B \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R}) \mid BA = AB\}$$

दिखाइए कि S आव्यूहों के जमा और सदिश गुणन के सापेक्ष वास्तविक सदिश समष्टि होने के

लिए अनिवार्य सभी अभिगृहीतों को संतुष्ट करता है। इसके आगे, दिखाइए कि R पर S की विमा एक से ज्यादा है। 8

(ख) Z पर एक ऐसा संबंध दीजिए जो संक्रामक है लेकिन सममित नहीं है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 2

7. बताइए कि निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य ? लघु उत्पत्ति या प्रतिउदाहरण के साथ अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए : 10

(i) दो व्युत्क्रमणीय आव्यूहों का योग व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

(ii) $n \times n$ आव्यूह का अल्पिष्ठ बहुपद घात n का होता है।

(iii) यदि A एक ऐकिक आव्यूह है, तब इसके सभी आइगेन मान 1 हैं।

(iv) यदि A, B, C समष्टीय समुच्चय U के तीन उपसमुच्चय हैं, तब :

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$$

(v) यदि कोई $n \in N$ दिया गया है तो एक ऐसा रैखिक रूपांतरण परिभाषित कर पाना संभव है जिसकी अष्टि की विमा n हो।