No. of Printed Pages : 8

PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

01725 **June, 2018**

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meaning.*

1. Attempt any ***five*** parts : *5×2=10*

(a) If H is a Hermitian matrix and U a unitary matrix, show that $U^{+}HU$ is a Hermitian matrix.

(b) If A^{ij} is an antisymmetric tensor and B_i is a vector, show that $A^{ij}B_iB_j = 0$.

(c) Locate and name the singularities in the finite z-plane of the function of complex variable $f(z) = \frac{\sin z^2}{z}$.

(d) Calculate the residues of the function $f(z) = \frac{z+2}{z^2 - 3z}$ at each of its poles.

(e) Is the group of all square matrices of order 3 a group under matrix addition ? Justify your answer.

(f) Obtain the Fourier transform of the function

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\lambda t} & t \geq 0 \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

(g) Use the first shifting theorem to calculate the Laplace transform of t^2e^t.

(h) Calculate (i) $\int_{-1}^{1} P_0(x)\, P_1(x)\, dx$, and

(ii) $\int_{-1}^{1} P_1^2(x)\, dx$.

2. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Verify the Cayley-Hamilton theorem for the matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Obtain the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Identify the conic section whose equation is

$$5x^2 - 4xy + 5y^2 = 4.$$

3. Attempt any ***one*** part : *10*

(a) Using the method of residues, prove that

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + 2\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}.$$

(b) Show that

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Attempt any ***one*** part : *10*

(a) Represent the function

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

as a Fourier integral. Use the result to show that

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Solve the initial value problem using the method of Laplace transforms :

$$y'' + 16y = 8\cos 4t;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 8$$

5. Attempt any ***one*** part : *10*

(a) Use the generating function for Hermite polynomials

$$g(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}$$

to evaluate the integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx.$$

(b) Show that

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i x \cos\theta}\, d\theta$$

by using the result

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \sin\theta)\, d\theta .$$

पी.एच.ई.-14

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2018

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

---

*नोट : **सभी** प्रश्न कीजिए । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

---

1. कोई ***पाँच*** भाग कीजिए : *5×2=10*

   (क) यदि H एक हर्मिटी आव्यूह है और U एक ऐकिक आव्यूह है, तो सिद्ध कीजिए कि $U^{+}HU$ एक हर्मिटी आव्यूह है ।

   (ख) यदि A^{ij} एक प्रतिसममित टेन्सर और B_i एक सदिश है, तो सिद्ध कीजिए कि $A^{ij}B_iB_j = 0$.

   (ग) सम्मिश्र चर के फलन $f(z) = \frac{\sin z^2}{z}$ की विचित्रताओं का परिमित z-समतल में स्थान निर्धारण कीजिए और उनका नाम बताइए ।

   (घ) फलन $f(z) = \frac{z+2}{z^2 - 3z}$ के प्रत्येक अनंतक पर अवशिष्ट परिकलित कीजिए ।

(ङ) क्या आव्यूह योग के अधीन कोटि 3 के सभी आव्यूहों का समुच्चय एक समूह होता है ? अपने उत्तर का स्पष्टीकरण दीजिए ।

(च) निम्न फलन का फूरिये रूपान्तर प्राप्त कीजिए :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\lambda t} & t \geq 0 \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

(छ) प्रथम स्थानांतरी प्रमेय का उपयोग कर t^2e^t का लाप्लास रूपान्तर परिकलित कीजिए ।

(ज) (i) $\int_{-1}^{1} P_0(x)\, P_1(x)\, dx$, और

(ii) $\int_{-1}^{1} P_1^2(x)\, dx$ के मान परिकलित कीजिए ।

2. कोई ***दो*** भाग कीजिए : *2×5=10*

(क) आव्यूह M के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय सिद्ध कीजिए :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ख) निम्नलिखित आव्यूह के आइगेनमान और आइगेनसदिश प्राप्त कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ग) उस शंकु-परिच्छेद को पहचानिए जिसका समीकरण $5x^2 - 4xy + 5y^2 = 4$ है ।

3. कोई *एक* भाग कीजिए : *10*

(क) अवशिष्ट विधि का प्रयोग कर, सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + 2\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{\pi}{4}$$

4. कोई *एक* भाग कीजिए : *10*

(क) फलन $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ का फूरिये समाकल निरूपित कीजिए । इस परिणाम का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

(ख) लाप्लास रूपान्तर विधि का प्रयोग कर, आदि मान समस्या

$y'' + 16y = 8\cos 4t;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 8$

का हल ज्ञात कीजिए ।

5. कोई *एक* भाग कीजिए : 10

(क) हर्मिट बहुपदों के जनक फलन

$$g(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}$$

का उपयोग कर निम्नलिखित समाकल का मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \, dx$$

(ख) निम्नलिखित परिणाम

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \sin \theta) \, d\theta$$

का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i x \cos \theta} \, d\theta$$