No. of Printed Pages : 12

MTE-14

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2018

01675

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt any **five** questions. All questions carry equal marks. Use of calculators is **not** allowed.*

1. (a) The mass m of the largest stone that can be moved by a flowing river depends upon the following three factors :

(i) velocity v of the river

(ii) density ρ of the water

(iii) acceleration g due to gravity

Using dimensional analysis, find a functional relation connecting mass m with the velocity v of the flowing river. *4*

(b) Two firms X and Y produce the same commodity. Due to production constraints, each firm is able to produce 1, 3 and 5 units. The cost of producing q_x units for firm X is ₹ $[6 + q_x^2 - 2q_x + 5]$ and firm Y has identical cost function ₹ $[6 + q_y^2 - 2q_y + 5]$ for producing q_y units. p is the price of one unit for X. We assume that the market is in equilibrium. The outcomes are the profits of the firms shown in the form of a matrix $A = \{a_{ij}\}_{3\times3}$, (pay-off matrix). Write the profits of (i) a_{11}, (ii) a_{22}, (iii) a_{21}, if demand function D(p) is given as $D(p) = 50 - p$. *6*

2. (a) A particle leaves the origin with velocity u. If it moves with an acceleration $\frac{\mu}{v^2}$, v being the velocity at any instant, show that the distance x travelled in time t is given by

$$4\,\mu x = (3\,\mu t + \mu^2)^{4/3} - u^4.$$ *5*

(b) The population in a colony of single species of birds increased from an initially low level. The proportionate birth and death rates were respectively 50% and 10% per annum, when the population size was 10,000. However, the proportionate birth and death rates were respectively, 30% and 20% per annum, when the population size was 20,000. If shooting of the birds takes place at a rate of 20% of the population size per annum, obtain the steady state population level. *5*

3. (a) Suppose a viscous oil, whose flow is in the laminar regime, is to be pumped through a 10 cm diameter horizontal pipe over a distance of 15 km at a rate of 10^{-3} m^3/s. Viscosity of the oil is 0·03 poise. What is the required pressure drop to maintain such a flow ? *4*

(b) Arrivals at a telephone booth are considered to be Poisson with an average time of 10 minutes between one arrival and the next. The length of a phone call is assumed to be distributed exponentially with mean 3 minutes.

(i) What is the probability that a person arriving at the booth will have to wait ?

(ii) What is the average length of the queue that forms from time-to-time ?

(iii) The telephone department will install a second booth when convinced that arrivals would be expected to wait at least 3 minutes for the phone. By how much must the flow of arrivals be increased in order to justify a second booth ? *6*

4. (a) If a simple pendulum of length l oscillates through an angle α on either side of the mean position, then find the angular velocity $\frac{d\theta}{dt}$ of the pendulum, where θ is the angle which the string makes with the vertical. *4*

(b) The population x(t) of a certain city satisfies the logistic law

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100}x - \frac{1}{(10)^8}x^2,$$

where t is measured in years. Given that the population of the city is 1,00,000 in 1980, determine the population at any time $t > 1980$. Also find the population in the year 2000. *6*

5. (a) Find the terminal velocity and time taken by a raindrop of radius 0·8 cm to reach the ground, if it starts its descent in a cloud 35,000 m high. *2*

(b) Assume that the moon is at a distance of 3,00,000 km from the earth and that it takes 28 days for it to orbit the earth once. Geostationary satellites are those which are at rest relative to the earth. Using these two statements derive the altitude of the geostationary satellite from the centre of the earth. *4*

(c) Characterise the following as deterministic or stochastic, giving reasons for your answer : 4

(i) Blood flow in arteries

(ii) Arrival of customers at a supermarket

(iii) Indian team winning in a cricket match

(iv) Movement of planets

6. (a) A particle moves in a straight line and its velocity at a distance x from the origin is $k\sqrt{a^2 - x^2}$, where k and a are constants. Prove that the motion is simple harmonic and find the amplitude and the periodic time of the motion. 4

(b) The heat emission rate associated with a stack gas is 5,000 kJ/s, the wind and stack gas speeds are 5 and 10 m/s, respectively and the inside stack diameter at the top is 3 m. Estimate the plume rise by means of the Moses and Carson formula. 2

(c) The cost of production of a substance per unit is given by the formula $C = q^2 - 4q + 1$, where q is the material cost. Find the selling price per unit, so that the profit on 100 units will be ₹ 200, if $q = 15$. Also calculate the cost of material per unit so that profit on 100 units can be maximised, if the selling price is ₹ 200. 4

7. (a) Derive the solution of the differential equation representing the behaviour of the response of an undamped forced system

$$\frac{1}{8}x''(t) + 2x(t) = \sin \omega t$$

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

for the two cases (i) $\omega \neq 4$, (ii) $\omega = 4$. *4*

(b) A projectile is fired with a constant speed v at two different angles of projection α and β such that it gives the same range. Show that

$$\text{cosec } \alpha = \sec \beta.$$ *4*

(c) Give one example each from the real world for the following, along with justification for your example : *2*

(i) A non-linear model

(ii) A stochastic model

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं । कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. (क) बहती हुई नदी में गतिमान एक सबसे बड़े पत्थर का द्रव्यमान m निम्नलिखित तीन घटकों पर निर्भर कर सकता है :

(i) नदी का वेग v

(ii) जल का घनत्व ρ

(iii) गुरुत्वीय त्वरण g

विमीय विश्लेषण द्वारा द्रव्यमान m और बहती हुई नदी के वेग v के बीच फलनिक संबंध ज्ञात कीजिए । *4*

(ख) दो फर्म X और Y एक ही पण्य का उत्पादन करती हैं । उत्पादन प्रतिबंधों के कारण दोनों फर्म 1, 3 और 5 इकाइयों का उत्पादन कर पाती हैं । फर्म X के लिए q_x इकाइयों के उत्पादन की लागत ₹ $[6 + q_x^2 - 2q_x + 5]$ है और फर्म Y के लिए q_y इकाइयों के उत्पादन के लिए लागत फलन ₹ $[6 + q_y^2 - 2q_y + 5]$ है । फर्म X के लिए एक इकाई की कीमत p है । हम मान लेते हैं कि बाज़ार संतुलन में है । परिणाम फर्मों के लाभ हैं जो आव्यूह $A = \{a_{ij}\}_{3\times3}$ (भुगतान आव्यूह) के रूप में दिखाया गया है । यदि माँग फलन $D(p) = 50 - p$ हो, तो लाभ (i) a_{11}, (ii) a_{22}, (iii) a_{21} लिखिए । *6*

2. (क) एक कण वेग u के साथ अपने मूल स्थान को छोड़ता है । यदि वह त्वरण $\frac{\mu}{v^2}$ के साथ आगे बढ़ता है, जहाँ v किसी भी क्षण पर कण का वेग है, तब दिखाइए कि समय t में तय की गई दूरी x निम्नलिखित द्वारा प्राप्त होती है :

$$4\,\mu x = (3\,\mu t + \mu^2)^{4/3} - u^4.$$ *5*

(ख) पक्षियों की एकल स्पीशीज़ की कॉलोनी में समष्टि के प्रारम्भिकतः निम्न तल में वृद्धि हुई । जब समष्टि आमाप 10,000 था, तब आनुपातिक जन्म और मृत्यु दरें प्रति वर्ष क्रमशः 50% और 10% थीं । तथापि, जब समष्टि आमाप 20,000 था, तब आनुपातिक जन्म और मृत्यु दरें प्रति वर्ष क्रमशः 30% और 20% थीं । यदि प्रति वर्ष समष्टि आमाप के 20% की दर से पक्षियों को मारा जाता है, तब स्थायी अवस्था समष्टि स्तर प्राप्त कीजिए । *5*

3. (क) मान लीजिए कि एक श्यान तेल, जिसका प्रवाह अप्रक्षुब्ध क्षेत्र में है, को 10^{-3} m^3/s की दर से 15 km की दूरी तक 10 cm व्यास वाली क्षैतिज पाइप में से पम्प करना है । तेल की श्यानता 0·03 पॉयज़ है । ऐसे प्रवाह को बनाए रखने के लिए कितने दाब पात की आवश्यकता है ? 4

(ख) एक टेलीफ़ोन बूथ पर आगमन प्वासों-बंटित है जहाँ दो आगमनों के बीच का समय औसतन 10 मिनट है । किसी भी फ़ोन कॉल की अवधि 3 मिनट के माध्य समय वाला एक चरघातांकी बंटन है ।

(i) इस बात की प्रायिकता क्या है कि बूथ पर आने वाले व्यक्ति को प्रतीक्षा करनी पड़ेगी ?

(ii) समय-समय पर बनने वाली पंक्ति की औसतन लंबाई क्या है ?

(iii) टेलीफ़ोन विभाग दूसरा बूथ तभी स्थापित करेगा जब उसे विश्वास हो जाएगा कि आने वाले व्यक्ति को फ़ोन के लिए कम-से-कम 3 मिनट प्रतीक्षा करनी पड़ती है । दूसरे बूथ को उचित ठहराने के लिए आगमन दर को कितना बढ़ाना चाहिए ? 6

4. (क) यदि लम्बाई l का एक सरल लोलक माध्य स्थिति के दोनों ओर कोण α पर दोलायमान करता है, तो लोलक का कोणीय वेग $\frac{d\theta}{dt}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ θ वह कोण है जो डोरी ऊर्ध्वाधर के साथ बनाती है । *4*

(ख) किसी शहर की जनसंख्या $x(t)$ वृद्धिघात नियम

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100} x - \frac{1}{(10)^8} x^2$$

को संतुष्ट करती है, जहाँ t को वर्षों में मापा गया है । यह दिया गया है कि 1980 में उस शहर की जनसंख्या 1,00,000 है, तब किसी भी समय $t > 1980$ पर जनसंख्या निर्धारित कीजिए । साथ ही, वर्ष 2000 में जनसंख्या ज्ञात कीजिए । *6*

5. (क) त्रिज्या 0·8 cm वाली एक वर्षा की बूँद का अंतिम वेग तथा उसके भूमि तक पहुँचने में लगने वाला समय ज्ञात कीजिए, यदि वह 35,000 m ऊँचे एक बादल से नीचे गिरना प्रारंभ करती है । *2*

(ख) मान लीजिए कि चन्द्रमा पृथ्वी से 3,00,000 km की दूरी पर है तथा यह पृथ्वी के परित: एक परिभ्रमण 28 दिन में करता है । तुल्यकाली उपग्रह वे उपग्रह हैं जो पृथ्वी के सापेक्ष विश्राम में रहते हैं । इन दो कथनों का उपयोग करते हुए, पृथ्वी के केन्द्र से तुल्यकाली उपग्रह की ऊँचाई व्युत्पन्न कीजिए । *4*

(ग) अपने उत्तर के लिए कारण देते हुए निम्नलिखित को निर्धारणात्मक और प्रसंभाव्य के रूप में अभिलक्षणित कीजिए : 4

(i) धमनियों में रक्त प्रवाह

(ii) एक सुपर-बाज़ार में ग्राहकों का आगमन

(iii) एक क्रिकेट मैच में भारतीय टीम का जीतना

(iv) ग्रहों की गति

6. (क) एक कण सीधी रेखा में गतिमान होता है और मूल-बिंदु से दूरी x पर इसका वेग $k\sqrt{a^2 - x^2}$ है, जहाँ k और a अचर हैं । सिद्ध कीजिए कि इसकी गति सरल आवर्ती है और गति का आयाम और आवर्त समय ज्ञात कीजिए । 4

(ख) स्टैक गैस से संबंधित ऊष्मा उत्सर्जन दर 5,000 kJ/s है, पवन चाल और स्टैक गैस चाल क्रमश: 5 और 10 m/s हैं और ऊपरि सिरे पर स्टैक गैस का अंत: व्यास 3 m है । मोसेज़ और कार्सन सूत्र की सहायता से पिच्छक उत्थान आकलित कीजिए । 2

(ग) एक वस्तु की प्रति इकाई उत्पादन लागत सूत्र $C = q^2 - 4q + 1$, द्वारा दी गई है, जहाँ q माल लागत है । प्रति इकाई बेचने की कीमत ज्ञात कीजिए, जिससे कि 100 इकाइयों पर ₹ 200 का लाभ हो, जबकि $q = 15$ है । यदि बेचने की कीमत ₹ 200 हो, तो 100 इकाइयों पर अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए प्रति इकाई माल लागत भी परिकलित कीजिए । 4

7. (क) दो स्थितियों (i) $\omega \neq 4$ (ii) $\omega = 4$ के लिए अवमंदित प्रणोदित तंत्र

$$\frac{1}{8} x''(t) + 2x(t) = \sin \omega t$$

$$x(0) = 0, \; x'(0) = 0$$

की अनुक्रिया के व्यवहार को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण का हल प्राप्त कीजिए । 4

(ख) दो अलग-अलग प्रेक्षण कोणों α और β पर अचर गति v से एक प्रक्षेप्य इस प्रकार दागा जाता है कि वह समान परास देता है । दिखाइए कि

$$\text{cosec } \alpha = \sec \beta.$$ 4

(ग) निम्नलिखित के लिए वास्तविक जीवन से संबंधित एक-एक उदाहरण तर्कसंगत दीजिए : 2

(i) अरैखिक निदर्श

(ii) प्रसंभाव्य निदर्श