No. of Printed Pages : 12

MTE-13

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

00375

June, 2018

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS

Time : 2 hours | *Maximum Marks : 50*
(Weightage : 70%)

Note : *Attempt **five** questions in all. Question no. **7** is **compulsory**. Answer any **four** questions from questions no. **1** to **6**. Calculators are **not** allowed.*

---

1. (a) Let G be a graph with p vertices and q edges. Show that

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$$

where

$$\delta = \delta(G) = \min \{\deg(v_i) \mid v_i \in V(G)\}$$

$$\Delta = \Delta(G) = \min \{\deg(v_i) \mid v_i \in V(G)\}.$$ *3*

(b) Solve the following recurrence relation : 5

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n, \ n \geq 0$$

(c) Write the converse and the negation of the following mathematical statement : 2

'If $n \in \mathbf{N}$ is of the form $\frac{m(m+1)}{2}$ for some $m \in \mathbf{N}$, then n is a triangular number.'

2. (a) Determine the validity of the following argument : 5

If I do not get 90%, I will not get a scholarship.

If I work hard, I will get 90%.

I worked hard.

Therefore, I got a scholarship.

(b) Find the Sterling number S_4^2. 2

(c) A post office has stamps only in denominations of ₹ 1, ₹ 2 and ₹ 5. Let a_n be the number of ways in which you can buy stamps worth ₹ n using these denominations for $n \geq 1$ and let $a_0 = 1$. Find the generating function for $\{a_n\}_{n \geq 0}$. 3

3. (a) Show that for m, n $\geq$ 2, $K_{m,n}$ is Hamiltonian if and only if m = n. *5*

(b) A TV network surveyed 80 people about three shows A, B and C. They found that 20 watch A, 16 watch B, 14 watch C, 8 watch both A and B, 5 watch both A and C, 4 watch both B and C and 2 watch all three. How many watch none of the shows ? *2*

(c) Obtain the Ferrers graph of the partition 8 + 7 + 6 + 5 + 5 + 3 + 2 + 1. Also find the conjugate partition. Is the partition self-conjugate ? Justify your answer. *3*

4. (a) Find the sum of the series

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^3}{k!} = \frac{1^3}{0!} + \frac{2^3}{1!} + \ldots + \frac{(n+1)^3}{n!} + \ldots$$

using an exponential generating function. *4*

(b) Show that $n! \geq 2^{n-1}$ for every $n \geq 1$ by mathematical induction. *3*

(c) Prove that for any positive integers n and k, $1 < k < n$, $P_n(k) = P_n(k-1) + P_{n-k}(k)$. *3*

5. (a) If a k-regular graph has no cycles of length less than 5, show that it must have at least $k^2 + 1$ vertices. *4*

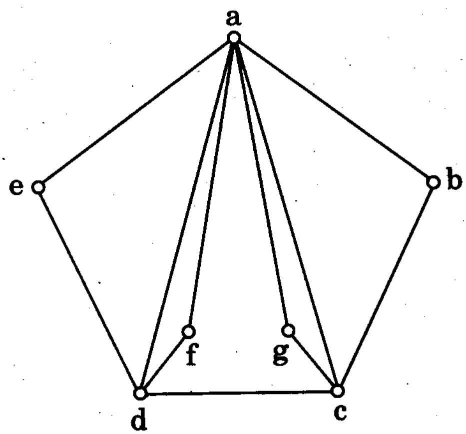
(b) Let t_n be the number of incongruent triangles with integral sides and perimeter n. Show that

$$t_n = \begin{cases} t_{n-3}, & \text{if n is even;} \\ t_{n-3} + \dfrac{n + (-1)^{\frac{n+1}{2}}}{4} & \text{if n is odd.} \end{cases}$$ *6*

6. (a) Let $f : B^2 \to B$ be a function defined by $f(0, 1) = 1$, $f(0, 0) = 0$, $f(1, 0) = 1$ and $f(1, 1) = 0$. Find the Boolean expression in DNF specifying f. *2*

(b) If a five-digit number is chosen at random, what is the probability that the product of the digits is 45 ? *4*

(c) Using Fleury's algorithm, find an Eulerian circuit in the following graph. Also indicate the bridges chosen. *4*



7. Which of the following statements are *True* and which are *False* ? Justify your answer with a short proof or by a counter-example. *5×2=10*

(a) For every $n \geq 4$, there is a 3-regular graph on n vertices.

(b) $a_{n+1} = a^2_{n-1} + a_{n-2}\, a_{n-3}\, a_{n-4}$ is a homogeneous recurrence.

(c) The number of onto functions from a 5-element set to a 3-element set is 150.

(d) If $f_{n,k}$ denotes the number of permutations with k matches (i.e., in which exactly k of the numbered objects appear in their natural positions), then $f_{n,k} = C(n, k)\, d_{n-k}$,

where d_n denotes the number of derangements of n objects.

(e) The statement 'Every odd number is a prime or every square is a rectangle' is a true statement.

एम.टी.ई.-13

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *कुल* ***पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न सं.* ***7 अनिवार्य*** *है । प्रश्न सं.* ***1*** *से* ***6*** *में से किन्हीं* ***चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों की अनुमति* ***नहीं*** *है ।*

1\. (क) मान लीजिए G, p शीर्षों और q कोरों वाला एक ग्राफ़ है । दिखाइए कि

$$\delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta$$

जहाँ

$$\delta = \delta(G) = \min \{\deg(v_i) \mid v_i \in V(G)\}$$

$$\Delta = \Delta(G) = \min \{\deg(v_i) \mid v_i \in V(G)\}.$$ *3*

(ख) निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध को हल कीजिए : 5

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n, \ n \geq 0$$

(ग) निम्नलिखित गणितीय कथन का विलोम और निषेध लिखिए : 2

'यदि $n \in \mathbf{N}$, किसी $m \in \mathbf{N}$ के लिए, $\frac{m(m+1)}{2}$ के रूप का है, तो n एक त्रिकोणीय संख्या है ।'

2. (क) निम्नलिखित तर्क की वैधता ज्ञात कीजिए : 5

यदि मुझे 90% नहीं मिलते हैं, तो मुझे छात्रवृत्ति नहीं मिलेगी ।

यदि मैं कठिन परिश्रम करता हूँ, तो मुझे 90% मिलेंगे ।

मैंने कठिन परिश्रम किया ।

इसलिए, मुझे छात्रवृत्ति मिली ।

(ख) स्टर्लिंग संख्या S_4^2 ज्ञात कीजिए । 2

(ग) एक डाकघर में डाक टिकट केवल ₹ 1, ₹ 2 और ₹ 5 के मूल्यवर्ग में हैं । मान लीजिए $n \geq 1$ के लिए, a_n उन तरीकों की संख्या है जिनमें आप ₹ n के डाक टिकट इन मूल्यवर्गों में खरीद सकते हैं और मान लीजिए $a_0 = 1$ है । $\{a_n\}_{n \geq 0}$ के लिए जनक फलन ज्ञात कीजिए । 3

3. (क) दिखाइए कि $m, n \geq 2$ के लिए, $K_{m,n}$ हैमिल्टोनीय है यदि और केवल यदि $m = n$ है । 5

(ख) एक टी.वी. नेटवर्क ने तीन कार्यक्रमों A, B और C के बारे में 80 लोगों का सर्वेक्षण किया । उन्होंने पाया कि 20 लोग A देखते हैं, 16 लोग B, 14 लोग C, 8 लोग A और B दोनों देखते हैं, 5 लोग A और C दोनों, 4 लोग B और C दोनों और 2 लोग तीनों कार्यक्रम देखते हैं । कितने लोग कोई भी कार्यक्रम नहीं देखते हैं ? 2

(ग) विभाजन $8 + 7 + 6 + 5 + 5 + 3 + 2 + 1$ का फ़ेरर्स ग्राफ़ प्राप्त कीजिए । संयुग्मी विभाजन भी ज्ञात कीजिए । क्या विभाजन स्वसंयुग्मी है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 3

4. (क) श्रेणी

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^3}{k!} = \frac{1^3}{0!} + \frac{2^3}{1!} + \ldots + \frac{(n+1)^3}{n!} + \ldots$$

का चरघातांकी जनक फलन के प्रयोग से योगफल ज्ञात कीजिए । 4

(ख) गणितीय आगमन से दिखाइए कि प्रत्येक $n \geq 1$ के लिए, $n! \geq 2^{n-1}$. 3

(ग) सिद्ध कीजिए कि किन्हीं धन पूर्णांकों n और k के लिए, $1 < k < n$, $P_n(k) = P_n(k-1) + P_{n-k}(k)$. 3

5. (क) यदि किसी k-नियमित ग्राफ़ में 5 से कम लंबाई वाले कोई भी चक्र नहीं है, तो दिखाइए कि इसमें कम-से-कम $k^2 + 1$ शीर्ष होंगे । 4

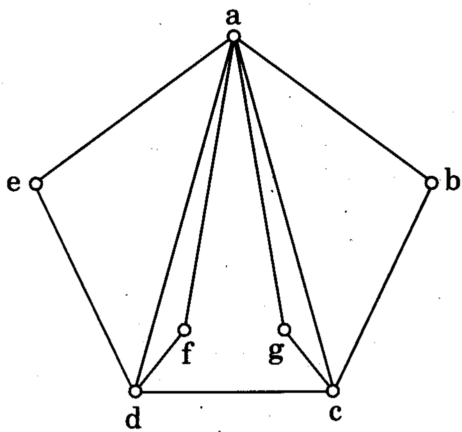
(ख) मान लीजिए t_n पूर्णांक भुजाओं और परिमिति n वाले असर्वांगसम त्रिभुजों की संख्या है । दिखाइए कि 6

$$t_n = \begin{cases} t_{n-3}, & \text{यदि } n \text{ सम है;} \\ t_{n-3} + \dfrac{n + (-1)^{\frac{n+1}{2}}}{4} & \text{यदि } n \text{ विषम है ।} \end{cases}$$

6. (क) मान लीजिए $f : B^2 \to B$, $f(0, 1) = 1$, $f(0, 0) = 0$, $f(1, 0) = 1$ और $f(1, 1) = 0$ से परिभाषित एक फलन है । f को निर्धारित करने वाला बूलीय व्यंजक DNF में ज्ञात कीजिए । 2

(ख) यदि एक पाँच अंकों वाली संख्या यादृच्छया चुनी जाती है, तो क्या प्रायिकता है कि इसके अंकों का गुणनफल 45 होगा ? 4

(ग) फ्लूरी-कलनविधि का प्रयोग करके, निम्नलिखित ग्राफ़ में एक ऑयलरी परिपथ ज्ञात कीजिए । चुने हुए सेतुओं को भी बताइए । *4*



7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* हैं और कौन-से *असत्य* ? एक लघु उपपत्ति या एक प्रत्युदाहरण द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *5×2=10*

(क) प्रत्येक $n \geq 4$ के लिए, n शीर्षों पर एक 3-नियमित ग्राफ़ होता है ।

(ख) $a_{n+1} = a_{n-1}^2 + a_{n-2}\, a_{n-3}\, a_{n-4}$ एक समघात पुनरावृत्ति है ।

(ग) एक 5-अवयव समुच्चय से एक 3-अवयव समुच्चय पर आच्छादक फलनों की संख्या 150 है ।

(घ) यदि $f_{n,k}$ क्रमचयों की संख्या को प्रदर्शित करता है जिनमें k वस्तुएँ मेल खाती हैं (अर्थात् जिनमें संख्यांकित वस्तुओं में से ठीक-ठीक k वस्तुएँ अपने स्थान पर ही रहती हैं), तो

$$f_{n,k} = C(n, k)\, d_{n-k},$$

जहाँ d_n, n वस्तुओं के अपविन्यास की संख्या को प्रदर्शित करता है ।

(ङ) कथन 'प्रत्येक विषम संख्या एक अभाज्य संख्या है या प्रत्येक वर्ग एक आयत है' एक सत्य कथन है ।