BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

01365 **June, 2018**

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-12 : LINEAR PROGRAMMING

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. **1** is **compulsory**. Answer any **four** questions from questions no. **2** to **7**. Use of calculators is **not** allowed.*

1. Which of the following statements are *True* and which are *False* ? Give a short proof or a counter-example in support of your answer. *5×2=10*

(a) There is no convex set with exactly three points.

(b) In a solution of a two-dimensional LPP, the objective function can assume same values at two distinct extreme points.

(c) For a 3×3 matrix A with $|A| = 3$, $|\text{Adj } A|$ is equal to 9.

(d) The pay-off matrix $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ has no saddle point.

(e) In a balanced transportation problem with 3 sources and 4 destinations, if the availability at the first source and the requirement at the first destination are equal, then the North-West corner method gives exactly 6 basic cells.

2. (a) In a game of matching coins with two players, suppose A wins one unit of value when there are two heads, wins nothing when there are 2 tails and loses 1/2 unit of the value when there is one head and one tail. Determine the pay-off matrix and optimal strategies for each player and the value of the game. *4*

(b) A factory uses three different resources P, Q and R for the manufacture of two different products A and B. A total of 20 units of P, 12 units of Q and 16 units of R are available. 1 unit of product A requires 2 units of P, 2 units of Q and 4 units of R; whereas 1 unit of product B requires 4 units of P, 2 units of Q and 0 unit of R. One unit of product A when sold gives a profit of ₹ 200, and one unit of product B when sold gives a profit of ₹ 300. Formulate the linear programming problem. How many units of each product should be manufactured for maximizing the total profit ? Solve it graphically. *6*

3. (a) Four salespersons are to be assigned to four territories. The returns (in thousands of ₹) obtained on assigning each salesperson to each territory is given in the following table :

		Salespersons			
		I	II	III	IV
Territories	A	−1	−2	3	4
	B	2	−4	3	5
	C	4	3	−6	7
	D	3	2	5	7

Find an assignment that maximizes the returns. What is the maximal return ? *4*

(b) Solve the following LPP by the two-phase method and give your conclusions about the solution : *6*

Maximize $z = 3x_1 + x_2$

subject to

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4. (a) Obtain the dual for the following LPP : 3

Minimize $z = 3x_1 + 9x_2 + 8x_3$

subject to

$$2x_1 + 4x_2 - 8x_3 \geq 5$$

$$4x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 9$$

$$-8x_1 + 3x_3 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(b) Find the initial basic feasible solution using North-West corner method for the following transportation problem :

		Warehouse			
		W_1	W_2	W_3	Supply
Factory	F_1	16	20	12	200
	F_2	14	8	18	160
	F_3	26	24	16	90
Demand		180	120	150	

Also, find the optimal solution. 7

5. (a) Write the LPP form of the following transportation problem : *4*

		Destinations				
		D_1	D_2	D_3	D_4	Supply
Sources	O_1	5	11	2	6	40
	O_2	4	9	7	1	30
	O_3	3	1	4	3	30
Demand		30	20	10	40	

(b) Solve the following game graphically : *6*

$$\begin{array}{c} \\ A \end{array} \begin{array}{c} B \\ \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

6. (a) Formulate a suitable LPP of the game with respect to minimizing and maximizing players : *5*

$$\begin{array}{c} \\ \text{Player A} \end{array} \begin{array}{c} \text{Player B} \\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 10 & 6 & 2 \\ 20 & 15 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

(b) Sketch the region $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1, y^2 \leq x\}$. Is the region convex ? Justify your answer. *3*

(c) Find all values of k for which the vectors $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} k \\ -k \\ 2 \end{bmatrix}$ are linearly independent. *2*

7. (a) Express $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ as a convex linear combination of A (0, 0), B (0, 1) and C (1, 0). *4*

(b) Find all the basic solutions of the following system : *6*

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-12 : रैखिक प्रोग्रामन

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 1 करना **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* हैं और कौन-से *असत्य* ? अपने उत्तर के पक्ष में संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण दीजिए । *5×2=10*

(क) ठीक तीन बिंदुओं वाला कोई अवमुख समुच्चय नहीं होता है ।

(ख) एक द्वि-विमीय LPP के हल में, उद्देश्य फलन का मान दो अलग-अलग चरम बिंदुओं पर समान हो सकता है ।

(ग) एक 3×3 आव्यूह A के लिए, जिसका सारणिक $|A| = 3$ है, उसके सहखंडज $|\text{Adj } A|$ का सारणिक 9 होगा ।

(घ) भुगतान आव्यूह $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ का कोई पल्याण बिंदु नहीं है ।

(ङ) 3 स्रोतों व 4 गंतव्यों की संतुलित परिवहन समस्या में, यदि प्रथम स्रोत की उपलब्धता प्रथम गंतव्य की ज़रूरत के समान है, तब उत्तर-पश्चिम कोना विधि से ठीक 6 आधारी कोष्ठिका ही मिलेंगी ।

2. (क) दो खिलाड़ियों के बीच एक सिक्के को मिलाने वाले खेल में, मान लीजिए कि A एक इकाई जीतता है जबकि दो चित प्राप्त होते हैं, वह कुछ भी नहीं जीतता जबकि दो पट प्राप्त होते हैं और वह 1/2 इकाई हारता है जबकि एक चित तथा एक पट प्राप्त होते हैं । भुगतान आव्यूह निर्धारित कीजिए और प्रत्येक खिलाड़ी के लिए इष्टतम युक्तियाँ भी ज्ञात कीजिए तथा खेल का मान भी बताइए । *4*

(ख) एक फैक्टरी दो भिन्न-भिन्न उत्पादों A और B का उत्पादन करने के लिए तीन भिन्न-भिन्न संसाधनों P, Q और R का प्रयोग करती है । कुल मिलाकर P की 20 इकाइयाँ, Q की 12 इकाइयाँ और R की 16 इकाइयाँ उपलब्ध हैं । उत्पाद A की 1 इकाई के लिए P की 2 इकाइयाँ, Q की 2 इकाइयाँ और R की 4 इकाइयों की आवश्यकता पड़ती है; जबकि उत्पाद B की 1 इकाई के लिए P की 4 इकाइयों, Q की 2 इकाइयों तथा R की 0 इकाई की आवश्यकता पड़ती है । उत्पाद A की एक इकाई बेचने पर ₹ 200 का लाभ होता है तथा उत्पाद B की एक इकाई बेचने पर ₹ 300 का लाभ होता है । रैखिक प्रोग्रामन समस्या का सूत्रीकरण कीजिए । अधिकतम कुल लाभ के लिए प्रत्येक उत्पाद की कितनी इकाइयों का उत्पादन करना चाहिए ? ग्राफीय विधि से इसे हल कीजिए । *6*

3. (क) चार विक्रेताओं के लिए चार क्षेत्र निर्धारित करने हैं । प्रत्येक विक्रेता के लिए क्षेत्र निर्धारण करने पर प्राप्ति (हजारों ₹ में) निम्नलिखित तालिका में दी गई है :

		विक्रेता			
		I	II	III	IV
क्षेत्र	A	– 1	– 2	3	4
	B	2	– 4	3	5
	C	4	3	– 6	7
	D	3	2	5	7

विक्रेताओं के लिए क्षेत्रों का नियतन ज्ञात कीजिए जिससे कि प्राप्ति अधिकतम हो । अधिकतम प्राप्ति क्या है ? *4*

(ख) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को द्विचरण विधि से हल कीजिए और हल के बारे में अपने निष्कर्ष दीजिए : *6*

$z = 3x_1 + x_2$ का अधिकतमीकरण कीजिए

जबकि

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

4. (क) निम्नलिखित LPP की द्वैती प्राप्त कीजिए : 3

$z = 3x_1 + 9x_2 + 8x_3$ का न्यूनतमीकरण कीजिए

जबकि

$$2x_1 + 4x_2 - 8x_3 \geq 5$$

$$4x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 9$$

$$-8x_1 + 3x_3 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(ख) निम्नलिखित परिवहन समस्या का उत्तर-पश्चिम कोना विधि द्वारा प्रारम्भिक आधारी सुसंगत हल ज्ञात कीजिए :

		गोदाम			
		W_1	W_2	W_3	पूर्ति
कारखाना	F_1	16	20	12	200
	F_2	14	8	18	160
	F_3	26	24	16	90
	माँग	180	120	150	

इष्टतम हल भी ज्ञात कीजिए । 7

5. (क) निम्नलिखित परिवहन समस्या का LPP रूप लिखिए : 4

गंतव्य

		D_1	D_2	D_3	D_4	पूर्ति
स्रोत	O_1	5	11	2	6	40
	O_2	4	9	7	1	30
	O_3	3	1	4	3	30
	माँग	30	20	10	40	

(ख) निम्नलिखित खेल, ग्राफीय विधि से हल कीजिए : 6

$$\begin{array}{c} \\ A \end{array} \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}$$

6. (क) निम्नलिखित खेल आव्यूह के लिए अधिकतमकारी और न्यूनतमकारी खिलाड़ियों के संगत LPP सूत्रित कीजिए : 5

$$\text{खिलाड़ी A} \overset{\text{खिलाड़ी B}}{\begin{bmatrix} 5 & 0 & -10 \\ 10 & 6 & 2 \\ 20 & 15 & 10 \end{bmatrix}}$$

(ख) प्रदेश $\{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1, y^2 \leq x\}$ का रेखाचित्र बनाइए । क्या प्रदेश अवमुख है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 3

(ग) k के उन सभी मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए सदिश $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} k \\ -k \\ 2 \end{bmatrix}$ रैखिकत: स्वतंत्र हैं । 2

7. (क) $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ को A (0, 0), B (0, 1) और C (1, 0) के अवमुख रैखिक संयोजन के रूप में व्यक्त कीजिए । 4

(ख) निम्नलिखित निकाय के सभी आधारी हल ज्ञात कीजिए : 6

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$$