

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

00515

June, 2018

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS  
MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS**

*Time : 2 hours*

*Maximum Marks : 50*

*(Weightage : 70%)*

---

*Note : Question no. 7 is compulsory. Attempt any four questions from questions no. 1 to 6. Use of calculators is not allowed.*

---

1. (a) In a frequency distribution, the coefficient of skewness based upon quartiles is 0.6. If the sum of the first and third quartiles is 100 and median is 38, find the value of the first and third quartiles. 3
- (b) If  $P(A) = p_1$ ,  $P(B) = p_2$  and  $P(A \cap B) = p_3$ , find the formula for each of the following : 4
- (i)  $P(\bar{A} \cup \bar{B})$
- (ii)  $P(A \cap \bar{B})$
- (iii)  $P(\overline{A \cup B})$
- (iv)  $P(A \cup (\bar{A} \cap B))$

- (c) Estimate  $\theta$  in the density function

$$f(x, \theta) = (1 + \theta) x^\theta; \theta < x < 1$$

by the method of moments.

3

2. (a) Let  $X$  be a random variable with p.d.f.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{12}; & 1 < x < 5 \\ 0; & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Find :

- (i) the c.d.f. of  $Y = 2X - 3$   
(ii) the p.d.f. of  $Y = 2X - 3$   
(iii) mean and variance of  $Y$

4

- (b) Let  $X_1, X_2, \dots, X_n$  be a random sample from a normal population with mean 0 and variance  $\sigma^2$ . Construct an unbiased

estimator of  $\sigma$  as a function of  $\sum_{i=1}^n |X_i|$ .

4

- (c) One bag contains 4 white and 3 black balls and a second bag contains 3 white and 5 black balls. One ball is drawn from the first bag and placed unseen in the second bag. What is the probability that a ball now drawn from the second bag is black ?

2

3. (a) Given the joint density function

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4}; & 0 < x < 2; 0 < y < 1 \\ 0; & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Find :

(i) the marginal density function of X and Y

(ii) Conditional density  $f(x/y)$

(iii) Check the independence of X and Y

(iv)  $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{3}\right)$

6

(b) The first quartile of the following distribution is known to be 21.5. Find the missing frequencies :

<i>Class</i>	<i>Frequency</i>
10 – 15	24
15 – 20	?
20 – 25	90
25 – 30	122
30 – 35	?
35 – 40	56
40 – 45	20
45 – 50	33
Total	460

Also, find the mode of the distribution.

4

4. (a) It is stated that 2% of the razor blades supplied by a manufacturer are defective. A random sample of 200 blades is drawn from a lot. Find the probability that
- (i) 3 or more are defective.
  - (ii) 4 or less are defective. 5
- (b) The first of the two samples drawn from a group has 100 items with mean 15 and variance 9. If the whole group has 250 items with mean 15.6 and standard deviation  $\sqrt{13.44}$ , find the standard deviation of the second sample. 5
5. (a) Let X be a gamma variate with parameter  $\lambda$ . Compute m.g.f. of X. Hence find mean and variance of X. 4
- (b) A random variable X takes the values -1, 1, 3, 5 with associated probabilities  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{6}$  and  $\frac{1}{2}$ , respectively. Find an upper bound to  $P[|X - 3| \geq 1]$  using Chebyshev's inequality. 3
- (c) State the conditions under which binomial distribution tends to Poisson distribution. 3

6. (a) The grades in a statistics course for a particular semester were as follows :

<i>Grade</i>	<i>Frequency</i>
A	14
B	18
C	32
D	20
E	16
F	20

Test the hypothesis that the distribution of grades is uniform at 5% level of significance.

[You may use the following values :

4

$$\chi^2_{5,0.05} = 11.07, \chi^2_{6,0.05} = 12.59].$$

- (b) In a laboratory record of an analysis of correlation data, the following results are available :

Variance of X = 9, Two regression equations

$$8X - 10Y + 66 = 0, 40X - 18Y = 214.$$

Find :

- (i) Mean values of X and Y
- (ii) Correlation coefficient between X and Y
- (iii) Standard deviation of Y
- (iv) Angle between two regression lines

6

7. Which of the following statements are *true* or *false*? Give reasons for your answer. 5×2=10

- (a) In a distribution, measure of symmetry is always greater than or equal to 1.
- (b) If  $X$  and  $Y$  are independent binomial variates with parameters  $n_1, p_1$  and  $n_2, p_2$ , respectively, then  $X + Y$  is also a binomial variate with parameters  $(n_1 + n_2), (p_1 + p_2)$ .
- (c) If  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , then  $X$  and  $Y$  are independent.
- (d) Maximum likelihood estimators are consistent, unbiased and asymptotically efficient.
- (e) If  $X$  and  $Y$  are independent random variables, then the m.g.f.

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) + M_Y(t).$$

---

स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.डी.पी.)  
सत्रांत परीक्षा  
जून, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित  
एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50  
(भारिता : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 7 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरो का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) एक बारंबारता बंटन में, चतुर्थकों पर आधारित वैषम्य गुणांक 0.6 है। यदि प्रथम और तृतीय चतुर्थकों का योगफल 100 है और माध्यिका 38 है, तो प्रथम और तृतीय चतुर्थकों के मान ज्ञात कीजिए। 3
- (ख) यदि  $P(A) = p_1$ ,  $P(B) = p_2$  और  $P(A \cap B) = p_3$  हैं, तो निम्नलिखित में से प्रत्येक का सूत्र ज्ञात कीजिए : 4
- (i)  $P(\bar{A} \cup \bar{B})$   
(ii)  $P(A \cap \bar{B})$   
(iii)  $P(\overline{A \cup B})$   
(iv)  $P(A \cup (\bar{A} \cap B))$

(ग) घनत्व फलन

$$f(x, \theta) = (1 + \theta) x^\theta; \theta < x < 1$$

का आघूर्ण विधि से  $\theta$  आकलित कीजिए ।

3

2. (क) मान लीजिए  $X$  निम्नलिखित प्रा.घ.फ. वाला एक यादृच्छिक चर है :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{12}; & 1 < x < 5 \\ 0; & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i)  $Y = 2X - 3$  का सं.घ.फ.

(ii)  $Y = 2X - 3$  का प्रा.घ.फ.

(iii)  $Y$  का माध्य और प्रसरण

4

(ख) मान लीजिए  $X_1, X_2, \dots, X_n$  माध्य 0 और प्रसरण  $\sigma^2$  वाली प्रसामान्य समष्टि से लिया गया एक यादृच्छिक

प्रतिदर्श है ।  $\sum_{i=1}^n |X_i|$  के एक फलन के रूप में  $\sigma$

का अनभिन्नत आकलक निकालिए ।

4

(ग) एक थैले में 4 सफ़ेद और 3 काली गेंदें और एक दूसरे थैले में 3 सफ़ेद और 5 काली गेंदें हैं । एक गेंद पहले थैले से निकालकर बिना देखे दूसरे थैले में रखी जाती है । वह प्रायिकता क्या है कि अब दूसरे थैले से निकाली गई एक गेंद काली है ?

2

3. (क) निम्नलिखित संयुक्त घनत्व फलन दिया गया है :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4}; & 0 < x < 2; 0 < y < 1 \\ 0; & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) X और Y का उपांत घनत्व फलन

(ii) सप्रतिबंध घनत्व  $f(x/y)$

(iii) X और Y के स्वातंत्र्य की जाँच

(iv)  $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{3}\right)$

6

(ख) निम्नलिखित बंटन का प्रथम चतुर्थक 21.5 है ।  
अनुपस्थित बारंबारताएँ ज्ञात कीजिए :

वर्ग	बारंबारता
10 – 15	24
15 – 20	?
20 – 25	90
25 – 30	122
30 – 35	?
35 – 40	56
40 – 45	20
45 – 50	33
कुल	460

बंटन का बहुलक भी ज्ञात कीजिए ।

4

4. (क) यह बताया गया है कि एक निर्माता द्वारा आपूर्ति किए गए रेजर ब्लेडों में 2% खराब हैं। एक लॉट से 200 ब्लेडों का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श निकाला जाता है। वह प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) 3 या 3 से अधिक ब्लेड खराब हैं।

(ii) 4 या 4 से कम ब्लेड खराब हैं।

5

(ख) एक समूह से लिए गए दो प्रतिदर्शों में से पहले प्रतिदर्श में माध्य 15 और प्रसरण 9 वाली 100 वस्तुएँ हैं। यदि पूरे समूह में माध्य 15.6 और मानक विचलन  $\sqrt{13.44}$  वाली 250 वस्तुएँ हैं, तो दूसरे प्रतिदर्श का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

5

5. (क) मान लीजिए  $X$ , प्राचल  $\lambda$  वाला एक गामा चर है।  $X$  का आ.ज.फ. निकालिए। इस प्रकार  $X$  का माध्य और प्रसरण ज्ञात कीजिए।

4

(ख) एक यादृच्छिक चर  $X$  के मान  $-1, 1, 3, 5$  और संबंधित प्रायिकताएँ क्रमशः  $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$  और  $\frac{1}{2}$  हैं। शेबीशेव असमिका का प्रयोग करके  $P[|X - 3| \geq 1]$  का उपरि परिबंध ज्ञात कीजिए।

3

(ग) वे प्रतिबंध लिखिए जिनसे द्विपद बंटन, प्वासों बंटन में परिवर्तित होता है।

3

6. (क) एक विशिष्ट सेमेस्टर में सांख्यिकी पाठ्यक्रम के वर्ग निम्नलिखित हैं :

वर्ग	बारंबारता
A	14
B	18
C	32
D	20
E	16
F	20

एक परिकल्पना, कि वर्गों का बंटन एकसमान है, का 5% सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए ।

4

[आप निम्नलिखित मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$$\chi_{5,0.05}^2 = 11.07, \chi_{6,0.05}^2 = 12.59]$$

- (ख) एक प्रयोगशाला में, सहसंबंध आँकड़ों के विश्लेषण के रिकॉर्ड में निम्नलिखित परिणाम उपलब्ध हैं :

X का प्रसरण = 9,

दो समाश्रयण समीकरण  $8X - 10Y + 66 = 0$ ,

$40X - 18Y = 214$ .

निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

- X और Y के माध्य मान
- X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक
- Y का मानक विचलन
- दोनों समाश्रयण रेखाओं के बीच का कोण

6

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं अथवा असत्य ? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए । 5×2=10

(क) एक बंटन में, सममिति माप हमेशा 1 के बराबर या 1 से अधिक होती है ।

(ख) यदि X और Y क्रमशः  $n_1, p_1$  और  $n_2, p_2$  प्राचल वाले स्वतंत्र द्विपद चर हैं, तो  $X + Y$  भी  $(n_1 + n_2), (p_1 + p_2)$  प्राचल वाला द्विपद चर होगा ।

(ग) यदि  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  है, तो X और Y स्वतंत्र हैं ।

(घ) अधिकतम संभावित आकलक संगत, अनभिन्नत और उपगमित: दक्ष होते हैं ।

(ङ) यदि X और Y स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं, तो आ.ज.फ.  
 $M_{X+Y}(t) = M_X(t) + M_Y(t)$ .