No. of Printed Pages : 12

MTE-10

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

00165

June, 2018

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Answer any **five** questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is **not** allowed. Symbols have their usual meanings.*

---

1. (a) From the following data, find the number of students having weight between 60 and 70 kg : *5*

Weight (in kg)	*No. of Students*
0 – 40	250
40 – 60	120
60 – 80	100
80 – 100	70
100 – 120	50

(b) Construct a fixed point iteration form $x = g(x)$ for the equation $x^3 + x^2 - 1 = 0$ so that the method converges in the interval $[0, 1]$. 3

(c) Starting with $x_0 = 0{\cdot}5$, do two iterations of the Newton-Raphson method to find an approximate root of the equation $x^3 + 3x - 1 = 0$. 2

2. (a) Determine the constants α, β and γ in the differentiation formula

$$y''(x_0) = \alpha y\,(x_0 - h) + \beta y\,(x_0) + \gamma y\,(x_0 + h),$$

so that the method is of the highest possible order. Find the order and the error term of the method. 5

(b) Set up the Gauss-Jacobi iteration scheme in matrix form for the following linear system of equations :

$$4x_1 - x_2 = 3$$

$$-x_1 + 4x_2 - x_3 = 2$$

$$-x_2 + 4x_3 = 3$$

Show that the iteration scheme is convergent. Hence, find the rate of convergence of this method. 5

3. (a) A particle is moving along a straight line. The displacement x of the particle at some time instances t are given below :

t	x
0	5
1	8
2	12
3	17
4	26

Find the velocity and acceleration of the particle at $t = 4$. *5*

(b) Solve the following system by the method of LU decomposition : *5*

$$2x + 3y + z = 9$$

$$x + 2y + 3z = 6$$

$$3x + y + 2z = 8$$

4. (a) Find the interval of unit length which contains the smallest positive root of the equation $x^3 - 2x - 10 = 0$. Using the mid-point of this interval as initial approximation, perform two iterations of the Birge-Vieta method. *6*

(b) Determine a unique polynomial f(x) of degree ≤ 3 such that

$$f(x_0) = 1, \; f'(x_0) = 2, \; f(x_1) = 2, \; f'(x_1) = 3$$

where $x_1 - x_0 = h$. *4*

5. (a) Find an interval of unit length which contains the smallest positive root of the equation

$$f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0.$$

Taking the end points of this interval as initial approximations, perform two iterations of the Secant method. *3*

(b) Evaluate the integral $I = \int_0^1 \frac{dx}{3+2x}$, using trapezoidal rule with 2 and 4 sub-intervals. Determine the minimum number of sub-intervals required, if the error in magnitude is less than 0·002. 5

(c) Prove that $\mu = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\delta^2}$, where δ is the central difference operator and μ is the mean operator. 2

6. (a) Find the value of α to ensure the fastest possible convergence with the iteration formula $x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + x_n^{-2} + 1}{\alpha + 1}$. 5

(b) Solve the system of equations

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12$$
$$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 17$$

by Gauss Elimination with partial pivoting. 5

7. (a) Find $y(1 \cdot 2)$ as a solution of

$$y' = x^2 + y^2, \ \ y(1) = 2, \ \ h = 0 \cdot 1$$

using Runge-Kutta method of order 2. *5*

(b) Estimate the eigenvalues of the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & -13 & 18 \\ 4 & -10 & 14 \end{pmatrix}$$

using the Gershgorin bounds. Draw a rough sketch of the region where the eigenvalues lie. *5*

एम.टी.ई.-10

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी अभिकलन 3 दशमलव स्थानों तक दिए जा सकते हैं । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

1. (क) निम्नलिखित आँकड़ों से 60 से 70 किग्रा के बीच भार वाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए : *5*

भार (किग्रा में)	*विद्यार्थियों की संख्या*
0 – 40	250
40 – 60	120
60 – 80	100
80 – 100	70
100 – 120	50

(ख) समीकरण $x^3 + x^2 - 1 = 0$ के लिए $x = g(x)$ के रूप में ऐसी नियत बिंदु पुनरावृत्ति बनाइए जो अतरांल $[0, 1]$ में अभिसरित करे । 3

(ग) समीकरण $x^3 + 3x - 1 = 0$ का सन्निकटन मूल ज्ञात करने के लिए $x_0 = 0 \cdot 5$ से शुरू करके न्यूटन-रैफ्सन विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए । 2

2. (क) अवकलन सूत्र

$$y''(x_0) = \alpha y\,(x_0 - h) + \beta y\,(x_0) + \gamma y\,(x_0 + h)$$

के लिए अचर α, β और γ निर्धारित कीजिए जिससे कि विधि की कोटि अधिकतम हो । विधि की कोटि और त्रुटि पद भी ज्ञात कीजिए । 5

(ख) निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल करने के लिए गाउस-जैकोबी पुनरावृत्ति विधि को आव्यूह रूप में स्थापित कीजिए :

$$4x_1 - x_2 = 3$$

$$-x_1 + 4x_2 - x_3 = 2$$

$$-x_2 + 4x_3 = 3$$

दिखाइए कि पुनरावृत्ति विधि अभिसरित होती है । अतः, पुनरावृत्ति विधि की अभिसरण दर ज्ञात कीजिए । 5

3. (क) एक कण सीधी रेखा में गतिमान है । कुछ समय t पर कण का विस्थापन x नीचे दिया गया है :

t	x
0	5
1	8
2	12
3	17
4	26

$t = 4$ पर कण का वेग और त्वरण ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) LU वियोजन विधि से निम्नलिखित निकाय को हल कीजिए : *5*

$$2x + 3y + z = 9$$

$$x + 2y + 3z = 6$$

$$3x + y + 2z = 8$$

4. (क) एकक लंबाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जो समीकरण $x^3 - 2x - 10 = 0$ के सबसे छोटे धनात्मक मूल को अंतर्विष्ट करता हो । इस अंतराल के मध्य-बिंदु को आदि सन्निकटन मान कर, बर्ज-विएटा विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए । 6

(ख) घात ≤ 3 वाला वह अद्वितीय बहुपद $f(x)$ ज्ञात कीजिए जिसके लिए

$f(x_0) = 1,\ f'(x_0) = 2,\ f(x_1) = 2,\ f'(x_1) = 3$ हो जहाँ $x_1 - x_0 = h$. 4

5. (क) एकक लंबाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जो समीकरण $f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$ के सबसे छोटे धनात्मक मूल को अंतर्विष्ट करता हो । इस अंतराल के अंत्य बिंदुओं को आदि सन्निकटन मान कर छेदिका विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए । 3

(ख) 2 और 4 उप-अंतराल लेकर समलंबी नियम द्वारा समाकल

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{3 + 2x}$$

का मूल्यांकन कीजिए । उप-अंतरालों की निम्नतम संख्या ज्ञात कीजिए जिससे कि त्रुटि का परिमाण 0·002 से कम हो । 5

(ग) सिद्ध कीजिए कि

$$\mu = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\delta^2},$$

जहाँ δ केन्द्रीय अंतर संकारक है और μ माध्य संकारक है । 2

6. (क) पुनरावृत्ति सूत्र

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n + x_n^{-2} + 1}{\alpha + 1}$$

द्वारा तीव्रतम संभावित अभिसरण सुनिश्चित करने के लिए α का मान ज्ञात कीजिए । 5

(ख) आंशिक कीलकन के साथ गाउस विलोपन विधि लागू करके निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए : 5

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12$$

$$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 17$$

7. (क) द्वितीय कोटि रूंगे-कुट्टा विधि द्वारा

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(1) = 2, \quad h = 0{\cdot}1$$

का हल $y(1{\cdot}2)$ ज्ञात कीजिए । 5

(ख) गर्शगोरिन परिबंधों का प्रयोग करके आव्यूह

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & -13 & 18 \\ 4 & -10 & 14 \end{pmatrix}$$

के आइगेनमान आकलित कीजिए । जहाँ आइगेनमान स्थित हैं उस प्रदेश का स्थूल चित्र बनाइए । 5