

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

June, 2018

03775

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-09 : REAL ANALYSIS**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : Attempt **five** questions in all. Question no. 1 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from questions no. 2 to 7. Use of calculators is **not allowed**.

1. Are the following statements *True* or *False* ?

Give reasons for your answers.

5×2=10

- (a) The set $S = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ is closed.
- (b) The function f , defined by $f(x) = \sin x - 2$, is uniformly continuous on $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.
- (c) The function f , defined by $f(x) = |x^2 + 5|$ is not differentiable over \mathbf{R} .

(d) A necessary condition for a function to be integrable is that it should be continuous.

(e) The series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+4n^2}{2n^2+1}$ is convergent.

2. (a) Find the upper and lower Riemann integrals of the function f , defined on $[a, b]$ as follows :

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{when } x \text{ is irrational} \\ 0, & \text{when } x \text{ is rational.} \end{cases}$$

Is f Riemann integrable on $[a, b]$? Justify your answer.

5

(b) Prove that a non-empty set is open if its complement is closed.

3

(c) Use the order completeness property to show that the set $S = \left\{ \frac{n}{n+7} : n \in \mathbf{N} \right\}$ has a supremum and an infimum.

2

3. (a) Test the conditional convergence of the series

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

4

(b) Show that the equation, $4x^3 - 7x^2 - 5 = 0$ has a root between 2 and $\frac{5}{2}$.

3

(c) Prove or disprove that $2 + \sqrt{11} \in \mathbf{Q}$.

3

4. (a) Examine the continuity of the function $f : [1, 4] \rightarrow \mathbf{R}$, defined by $f(x) = \frac{[x]+4}{3x-1}$, where $[x]$ denotes the greatest integer function. 5

(b) Represent the number $2 + \sqrt{5}$ on the real line. 2

(c) Show that the following series $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^3} + \dots$ is convergent. 3

5. (a) Find whether or not the following sequences are convergent : 4

(i) $\{4 + (-1)^n\}$

(ii) $\left\{ \frac{4n + n^2}{2n^2 + 3n} \right\}$

(b) Evaluate

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{3n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+3r)^3}} \quad 4$$

(c) Justify that $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(5-x)^2} = \infty$. 2

6. (a) Find the values of p and q so that $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p \sin x + x(1 - q \cos x)}{5x^3} = \frac{1}{6}$. 4

- (b) State the Cauchy's general principle of convergence for sequences. Hence, check whether the sequence $\{a_n\}$, where $a_n = \frac{5}{n+1}$, is convergent or not. 3
- (c) Give an example, with justification, of a function which is not differentiable at only two points of its domain. 3
7. (a) By showing that the remainder after n -terms tends to zero, find the Maclaurin's series expansion of $\sin 3x$. 5
- (b) Using the sequential definition of continuity, prove that the function $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, defined by $f(x) = 3x^2 + 7, \forall x \in \mathbf{R}$, is continuous. 2
- (c) Using Weierstrass' M-test, show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+2)^2}$ converges uniformly in $[0, k]$, where k is any given finite positive number. 3
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है ।
प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।
कैल्कुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।

1. क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य ? अपने उत्तरों के लिए कारण दीजिए । 5×2=10

(क) समुच्चय $S = \{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ संवृत है ।

(ख) $f(x) = \sin x - 2$ द्वारा परिभाषित फलन f , $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ पर एकसमानतः संतत है ।

(ग) $f(x) = |x^2 + 5|$ द्वारा परिभाषित फलन f , \mathbf{R} पर अवकलनीय नहीं है ।

(घ) फलन के समाकलनीय होने के लिए फलन का संतत होना आवश्यक प्रतिबंध है ।

(ङ) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+4n^2}{2n^2+1}$ अभिसारी है ।

2. (क) $[a, b]$ में $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{जब } x \text{ अपरिमेय है} \\ 0, & \text{जब } x \text{ परिमेय है} \end{cases}$

से परिभाषित फलन f के उपरि और निम्न रीमान समाकल ज्ञात कीजिए । क्या f , $[a, b]$ पर रीमान समाकलनीय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए ।

5

(ख) सिद्ध कीजिए कि कोई भी अरिक्त समुच्चय विवृत होता है यदि उसका पूरक संवृत होता है ।

3

(ग) क्रम पूर्णता गुणधर्म का प्रयोग करके दिखाइए कि समुच्चय $S = \left\{ \frac{n}{n+7} : n \in \mathbf{N} \right\}$ के लिए उच्चक और निम्नक का अस्तित्व होता है ।

2

3. (क) श्रेणी $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$ के सप्रतिबंध अभिसरण की जाँच कीजिए ।

4

(ख) दिखाइए कि समीकरण $4x^3 - 7x^2 - 5 = 0$ का एक मूल 2 और $\frac{5}{2}$ के बीच स्थित होता है ।

3

(ग) सिद्ध अथवा असिद्ध कीजिए कि $2 + \sqrt{11} \in \mathbf{Q}$.

3

4. (क) $f(x) = \frac{[x]+4}{3x-1}$ द्वारा परिभाषित फलन $f: [1, 4] \rightarrow \mathbf{R}$ के सांतत्य की जाँच कीजिए, जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है। 5

(ख) संख्या $2 + \sqrt{5}$ को वास्तविक रेखा पर निरूपित कीजिए। 2

(ग) दिखाइए कि निम्नलिखित श्रेणी $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^3} + \dots$ अभिसारी है। 3

5. (क) ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित अनुक्रम अभिसारी हैं या नहीं : 4

(i) $\{4 + (-1)^n\}$

(ii) $\left\{ \frac{4n + n^2}{2n^2 + 3n} \right\}$

(ख) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{3n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+3r)^3}}$ का मूल्यांकन कीजिए। 4

(ग) पुष्टि कीजिए कि $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(5-x)^2} = \infty$. 2

6. (क) p और q के ऐसे मान ज्ञात कीजिए ताकि

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p \sin x + x(1 - q \cos x)}{5x^3} = \frac{1}{6} \quad 4$$

- (ख) अनुक्रमों के लिए कौशी के व्यापक अभिसरण नियम का कथन दीजिए । इस तरह, जाँच कीजिए कि अनुक्रम $\{a_n\}$ अभिसारी है या नहीं, जहाँ $a_n = \frac{5}{n+1}$. 3
- (ग) पुष्टि सहित एक ऐसे फलन का उदाहरण दीजिए जो अपने प्रांत के केवल दो बिन्दुओं पर अवकलनीय नहीं है । 3
7. (क) यह दिखाते हुए कि n -पदों के बाद अवशेष, शून्य की ओर प्रवृत्त होता है, $\sin 3x$ का मैक्लॉरिन श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिए । 5
- (ख) सांतत्य की अनुक्रमिक परिभाषा का प्रयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि फलन $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, जो $f(x) = 3x^2 + 7, \forall x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित है, सतत है । 2
- (ग) वाइएस्ट्रास M -परीक्षण का प्रयोग करते हुए, दिखाइए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+2)^2}$, $[0, k]$ में एकसमानतः अभिसरण करती है जहाँ k कोई दी गई परिमित धनात्मक संख्या है । 3