No. of Printed Pages : 8

MTE-08

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

01425

Term-End Examination

June, 2018

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. **1** is **compulsory**. Attempt any **four** questions from the remaining questions no. **2** to **7**. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. State whether the following statements are *True* or *False*. Justify your answers with the help of a short proof or a counter-example. *5×2=10*

(a) The differential equation of all circles touching the axis of y at the origin and centres on the x-axis is

$$2xy \frac{dy}{dx} + (x^2 - y^2) = 0.$$

(b) $y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^n$ is a non-linear equation for all integer values of n.

(c) The complete solution of the second order p.d.e.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = x - y$$

involves two arbitrary constants.

(d) The differential equation

$$\frac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$$

is reducible to a linear differential equation.

(e) The partial differential equation

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = e^y + \sin x, \quad u = u(x, y),$$

is a quasi-linear p.d.e.

2. (a) Solve the following differential equation : *3*

$$y\,dx - x\,dy + (1 + x^2)\,dx + x^2 \sin y\,dy = 0$$

(b) Solve the simultaneous differential equations

$$\frac{dx}{y(x+y)+az} = \frac{dy}{x(x+y)-az} = \frac{dz}{z(x+y)}. \quad 3$$

(c) Solve the following differential equation by reducing it to normal form using the method of change of dependent variable : *4*

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)xy = x^2e^x$$

3. (a) Use the method of variation of parameters to solve the differential equation

$$y'' - y = \frac{2}{1 + e^x}. \quad 4$$

(b) The differential equation of a damped vibrating system under the action of an external periodic force is

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2m_0 \frac{dx}{dt} + n^2x = a \cos pt .$$

Show that if $n > m_0 > 0$, the complementary function of the differential equation represents vibrations which are soon damped out. Find the particular integral in terms of periodic functions. 4

(c) Find a homogeneous linear differential equation with constant coefficients that is satisfied by

$$y = 5xe^{-2x} \cos 3x.$$ 2

4. (a) A body whose temperature is initially 100°C is allowed to cool in air whose temperature remains constant at 20°C. Find the temperature of the body as a function of time t, if it is observed that the body cools to 40°C in 10 minutes. 3

(b) Use Charpit's method to find the complete integral of the following partial differential equation : 4

$$xp + 3yq = 2 (z - x^2q^2)$$

(c) Solve the partial differential equation

$$(3D^2 - 2D'^2 + D - 1) z = 4e^{x+y} \cos (x + y).$$ 3

5. (a) Solve : 3

$$\frac{dy}{dx} + xy = e^{x^2/2} (\sin x) y^2$$

(b) Solve the following initial value problem : 4

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = -6 \sin 2x - 18 \cos 2x$$

$$y(0) = 2, \; y'(0) = 2$$

(c) Find the integral curves of the equation

$$(mz - ny)\, p + (nx - lz)\, q = (ly - mx).$$ 3

6. (a) Verify that the following equation is integrable and then determine its solution : 4

$$(y^2 + z^2)\, dx + xy\, dy + xz\, dz = 0$$

(b) Solve the differential equation

$$4 (x - 2)^2 \frac{dy}{dx} = (x + y - 1)^2.$$ 3

(c) Write the ordinary differential equation

$$y\, dx + (xy + x - 3y)\, dy = 0$$

in the linear form, and hence find its solution. 3

7. (a) Using the method of separation of variables, find the solution of the heat equation

$$u_t = k^2 u_{xx}, \; k > 0$$

that satisfies the following conditions : 7

$$u(0, t) = 0, \; u(2, t) = 0, \; u(x, 0) = \frac{\sin \pi x}{2}$$

(b) Show that the partial differential equations

$$p^2 + q^2 - 1 = 0 \text{ and } (p^2 + q^2)\, x - pz = 0$$

are compatible. 3

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट: *प्रश्न सं. 1 **अनिवार्य** है । शेष प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । *5×2=10*

   (क) y-अक्ष को मूल-बिंदु पर छूने वाले सभी वृत्तों, जिनके केन्द्र x-अक्ष पर हों, का अवकल समीकरण

   $$2xy\frac{dy}{dx} + (x^2 - y^2) = 0 \text{ है ।}$$

   (ख) $y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$, n के सभी पूर्णांक मानों के लिए अरैखिक समीकरण है ।

   (ग) द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरण

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = x - y$$

   के पूर्ण हल में दो स्वेच्छ अचर शामिल होंगे ।

(घ) अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$$

को एक रैखिक अवकल समीकरण में समानीत किया जा सकता है ।

(ङ) आंशिक अवकल समीकरण

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = e^y + \sin x, \; u = u(x, y),$$

एक रैखिककल्प आंशिक अवकल समीकरण है ।

2. (क) निम्नलिखित अवकल समीकरण का हल प्राप्त कीजिए : *3*

$$y\,dx - x\,dy + (1 + x^2)\,dx + x^2 \sin y\,dy = 0$$

(ख) निम्नलिखित युगपत अवकल समीकरणों को हल कीजिए : *3*

$$\frac{dx}{y(x+y)+az} = \frac{dy}{x(x+y)-az} = \frac{dz}{z(x+y)}$$

(ग) परतंत्र चर की परिवर्तन-विधि द्वारा निम्नलिखित अवकल समीकरण को प्रसामान्य रूप में समानीत करके हल कीजिए : *4*

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)xy = x^2e^x$$

3. (क) प्राचल विचरण विधि से अवकल समीकरण

$$y'' - y = \frac{2}{1 + e^x}$$

को हल कीजिए । *4*

(ख) बाह्य आवर्ती बल की क्रिया के अन्तर्गत अवमंदित कंपन तंत्र का अवकल समीकरण

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2m_0 \frac{dx}{dt} + n^2x = a \cos pt \text{ है ।}$$

दिखाइए कि यदि $n > m_0 > 0$, तब अवकल समीकरण का पूरक फलन उन कंपनों को निरूपित करता है जो शीघ्र अवमंदित हो जाएँगी । आवर्ती फलनों के पदों में विशेष समाकल ज्ञात कीजिए । 4

(ग) अचर गुणांक वाला ऐसा समघात रैखिक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए जो

$$y = 5xe^{-2x} \cos 3x$$

द्वारा संतुष्ट होता हो । 2

4. (क) एक पिण्ड, जिसका आरंभ में तापमान 100°C है, को 20°C के स्थिर तापमान वाली वायु में ठंडा होने दिया जाता है । यदि यह पाया जाए कि पिण्ड 10 मिनट में 40°C तक ठंडा हो जाता है, तो समय t के फलन के रूप में पिण्ड का तापमान ज्ञात कीजिए । 3

(ख) चार्पिट-विधि द्वारा आंशिक अवकल समीकरण

$$xp + 3yq = 2(z - x^2q^2)$$

का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए । 4

(ग) आंशिक अवकल समीकरण

$$(3D^2 - 2D'^2 + D - 1)\, z = 4e^{x+y} \cos(x + y)$$

को हल कीजिए । 3

5. (क) हल कीजिए : 3

$$\frac{dy}{dx} + xy = e^{x^2/2} (\sin x)\, y^2$$

(ख) निम्नलिखित आदि मान समस्या को हल कीजिए : 4

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = -6 \sin 2x - 18 \cos 2x$$

$$y(0) = 2, \; y'(0) = 2$$

(ग) समीकरण

$$(mz - ny)\, p + (nx - lz)\, q = (ly - mx)$$

के समाकल वक्र ज्ञात कीजिए । 3

6. (क) जाँच कीजिए कि समीकरण

$$(y^2 + z^2)\, dx + xy\, dy + xz\, dz = 0$$

समाकलनीय है तथा इसका हल ज्ञात कीजिए । 4

(ख) अवकल समीकरण

$$4\,(x - 2)^2 \frac{dy}{dx} = (x + y - 1)^2$$

को हल कीजिए । 3

(ग) साधारण अवकल समीकरण

$$y\, dx + (xy + x - 3y)\, dy = 0$$

को रैखिक रूप में लिखिए, और तब इसका हल प्राप्त कीजिए । 3

7. (क) चर-पृथक्करण विधि द्वारा ऊष्मा समीकरण

$$u_t = k^2 u_{xx}, \; k > 0$$

का हल प्राप्त कीजिए जो प्रतिबंधों

$$u(0, t) = 0, \; u(2, t) = 0, \; u(x, 0) = \frac{\sin \pi x}{2}$$

को संतुष्ट करता हो । 7

(ख) दिखाइए कि आंशिक अवकल समीकरण

$$p^2 + q^2 - 1 = 0 \text{ और } (p^2 + q^2)\, x - pz = 0$$

सुसंगत हैं । 3