No. of Printed Pages : 8

MTE-07

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

02545

June, 2018

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is* ***compulsory****. Attempt any* ***four*** *questions out of the remaining. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

1. State whether the following statements are *True* or *False*. Justify your answers. *5×2=10*

(a) If $f(x) = 1/x$ and $g(x) = \tan x$, then the domain of $f + g$ is $\mathbf{R} - \{0\}$.

(b) The set

$$S = \left\{ x + \frac{1}{x} \,\middle|\, 0 < x < 1 \right\}$$

is bounded above.

(c) The function

$$f(x, y) = \tan\left(\frac{x^4 - 2y^4}{x^2 + y^2}\right)$$

is a homogeneous function of degree 2.

(d) The function $f(x, y) = (2x + y^3, 3xy^2 + 8)$ is a conservative function.

(e) If $u(x, y) = x \sin y$ and $v(x, y) = x \cos y$, then u and v are functionally dependent on the domain $D = \{(x, y) \mid x > 0\}$.

2. (a) Evaluate : *5*

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 \sin x - x}{2x^3}$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0^+} (\sin x)^{\sin x}$

(b) Locate and classify the stationary points of the function

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6xy + 6x + 3y - 4$. *3*

(c) If $f(x, y, z) = x + y + z$ and $g(x) = 2x$, do fog and gof exist ? Give reasons. *2*

3. (a) Find the minimum value of the function

$f(x, y) = x^2 + 2y^2$ on the circle $x^2 + y^2 = 1$. *5*

(b) Evaluate

$$\iiint_W \cos (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \, dx \, dy \, dz,$$

where W is bounded by the sphere

$x^2 + y^2 + z^2 = 25$. *5*

4. (a) If $u = \sin^{-1}(x^2 + y^2)^{1/5}$, show that

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{5}\tan u.$$ *4*

(b) If

$e = (2, 1)$, $f = (1, -1)$ and $g = (-1, 3)$,

find $|x - y|$ and $|x + 2y|$, where

$x = e + 2f + g$, $y = -e - f + 3g$. *3*

(c) Let

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|y|}, & \text{if } y \neq 0 \\ 0, & \text{if } y = 0 \end{cases}$$

Show that $f_y(1, 0)$ does not exist. *3*

5. (a) Check if the following integrals are independent of path and evaluate the path-independent integrals : *5*

(i) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,2)} (2xe^y + y)\,dx + (x^2e^y + x - 2y)\,dy$

(ii) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(2,2)} (x \sin xy + y \cos xy)\,dx + (x^2 \cos xy)\,dy$

(b) Find the second order Taylor polynominal of $f(x, y) = \sin xy$ about the point $(1, \pi/2)$. *3*

(c) Let $f(x, y) = 2x + 3y$ and $g(x, y) = x - 2y$. Then find the level curves of $f - g$ and also find their slopes. *2*

6. (a) Find the surface area of the portion of the paraboloid $z = 25 - x^2 - y^2$, which lies above the xy-plane. *6*

(b) Find the two repeated limits of the function

$$f(x, y) = \frac{y - x}{y + x} \frac{1 + x^2}{1 + y^2} \text{ at } (0, 0).$$

Does the simultaneous limit f exist as $(x, y) \to (0, 0)$? Explain. *4*

7. (a) Let

$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = 0$, if either $x = 0$ or $y = 0$

$= 1$, otherwise.

(i) Show that f is not continuous at (0, 0).

(ii) Find the directional derivative of f in the direction $\theta = \pi/4$ at (0, 0), if it exists. *5*

(b) Calculate the Jacobian $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}$ for $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ and $z = z$ at the point $(5, \frac{\pi}{2}, 3)$ *2*

(c) Integrate $f(x, y) = x^4 + y^2$ over the region bounded by $y = x$, $y = 2x$ and $x = 2$. *3*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट: *प्रश्न सं. 1 **अनिवार्य** है । शेष प्रश्नों में से किन्हीं **चार** के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन *सत्य* हैं या *असत्य* । अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । *5×2=10*

(क) यदि $f(x) = 1/x$ और $g(x) = \tan x$, तब $f + g$ का प्रांत $\mathbf{R} - \{0\}$ है ।

(ख) समुच्चय

$$S = \left\{ x + \frac{1}{x} \,\middle|\, 0 < x < 1 \right\}$$

ऊपर से परिबद्ध है ।

(ग) फलन

$$f(x, y) = \tan\left(\frac{x^4 - 2y^4}{x^2 + y^2}\right)$$

घात 2 वाला एक समघात फलन है ।

(घ) फलन $f(x, y) = (2x + y^3, 3xy^2 + 8)$ एक संरक्षी फलन है ।

(ङ) यदि $u(x, y) = x \sin y$ और $v(x, y) = x \cos y$, तब u और v प्रांत $D = \{(x, y) | x > 0\}$ में फलनिकत: आश्रित हैं ।

2. (क) मूल्यांकन कीजिए : *5*

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{3 \sin x - x}{2x^3}$

(ii) $\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^{\sin x}$

(ख) फलन

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6xy + 6x + 3y - 4$

के स्तब्ध बिन्दु पता लगाइए और उन्हें वर्गीकृत कीजिए । *3*

(ग) क्या फलन $f(x, y, z) = x + y + z$ और $g(x) = 2x$ के लिए fog और gof का अस्तित्व होता है ? अपने उत्तर के कारण दीजिए । *2*

3. (क) वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ पर फलन $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ के निम्नतम मान ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) $\iiint_W \cos (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \, dx \, dy \, dz$

का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ

W गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ द्वारा परिबद्ध है । *5*

4. (क) यदि

$u = \sin^{-1}(x^2 + y^2)^{1/5}$, तो दिखाइए कि

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2}{5}\tan u$$ 4

(ख) यदि

$e = (2, 1)$, $f = (1, -1)$ और $g = (-1, 3)$, तब $|x - y|$ और $|x + 2y|$ ज्ञात कीजिए,

जहाँ $x = e + 2f + g$, $y = -e - f + 3g$. 3

(ग) मान लीजिए

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|y|}, & \text{if } y \neq 0 \\ 0, & \text{if } y = 0 \end{cases}$$

तब दिखाइए कि $f_y(1, 0)$ का अस्तित्व नहीं होता । 3

5. (क) जाँच कीजिए कि क्या निम्नलिखित समाकल पथ स्वातंत्र्य हैं और जो पथ स्वातंत्र्य हैं उनका मूल्यांकन कीजिए : 5

(i) $\int_{(0,0)}^{(1,2)} (2xe^y + y)\,dx + (x^2e^y + x - 2y)\,dy$

(ii) $\int_{(1,1)}^{(2,2)} (x \sin xy + y \cos xy)\,dx + (x^2 \cos xy)\,dy$

(ख) बिन्दु $(1, \pi/2)$ के गिर्द फलन $f(x, y) = \sin xy$ का द्वितीय कोटि टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए । 3

(ग) मान लीजिए $f(x, y) = 2x + 3y$ और $g(x, y) = x - 2y$ है । तब $f - g$ के स्तर वक्र और उनकी प्रवणताएँ ज्ञात कीजिए । 2

6. (क) परवलयज $z = 25 - x^2 - y^2$ के उस भाग का पृष्ठीय-क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो xy-समतल के ऊपर स्थित है । *6*

(ख) (0, 0) पर फलन

$$f(x, y) = \frac{y - x}{y + x} \frac{1 + x^2}{1 + y^2}$$

की दो पुनरावृत्त सीमाएँ ज्ञात कीजिए । क्या $(x, y) \to (0, 0)$ होने से f की युगपत सीमा का अस्तित्व होता है ? स्पष्ट कीजिए । *4*

7. (क) मान लीजिए

$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = 0$, यदि $x = 0$ या $y = 0$
$= 1$, अन्यथा ।

(i) दिखाइए कि (0, 0) पर f संतत नहीं है ।

(ii) (0, 0) पर $\theta = \pi/4$ की दिशा में f का दिक्-अवकलज ज्ञात कीजिए, यदि इसका अस्तित्व है तो । *5*

(ख) $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$ के लिए बिन्दु $(5, \frac{\pi}{2}, 3)$ पर जैकोबियन $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}$ परिकलित कीजिए । *2*

(ग) $y = x$, $y = 2x$ और $x = 2$ से परिबद्ध प्रदेश पर $f(x, y) = x^4 + y^2$ को समाकलित कीजिए । *3*