BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2018

03845

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-06 : ABSTRACT ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no.* ***5*** *is* ***compulsory****. Attempt any* ***four*** *questions from questions no.* ***1 – 4, 6*** *and* ***7****. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

---

1. (a) Using mathematical induction, prove that $10^{n+1} + 10^n + 1$ is divisible by 3, $\forall\ n \geq 1$. *3*

(b) Check whether any group of order 44 has a proper normal subgroup or not. *3*

(c) Find all the roots in R of $x^2 - (1, 1) \in R[x]$, where $R = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Also, find how many roots of $x^2 - (2, 1) \in R[x]$ are there in R. *4*

2\. (a) If G is a group of order 36 and H and K are its subgroups of orders 18 and 9, then show that HK is a subgroup of G. Also show that $o(H \cap K) \geq 3$. *4*

(b) Consider $R = \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$, the ring of 2×2 matrices with real number entries. Find two non-zero elements $x, y \in R$ such that $xy = 0$ and $yx \neq 0$. Also check whether the set $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbf{R} \right\}$ is an ideal of R or not. *4*

(c) Find the signature of $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. *2*

3\. (a) Consider the ring $\mathbf{Z}$. Let $I = 4\mathbf{Z}$ and $J = 6\mathbf{Z}$. Is $IJ = I \cap J$? Give reasons for your answer. Further, if $I + J = < a >$, find a. *3*

(b) Give two distinct maximal ideals in the polynomial ring $\mathbf{R}[x]$, with justification. *3*

(c) Let $S = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \middle| (q, 5) = 1 \right\}$. Define a relation '$\sim$' on S by $\frac{p}{q} \sim \frac{r}{s}$ iff $S \mid (ps - qr)$. Show that '$\sim$' is an equivalence relation. Also find the equivalence class of 0. *4*

4. (a) Let D be a Euclidean domain, with Euclidean valuation d. Prove that for every integer n such that $d(1) + n \geq 0$, the function $f_n : D \setminus \{0\} \to \mathbf{Z} : f_n(a) = d(a) + n$ is a Euclidean valuation on D. *3*

(b) Use the Fundamental Theorem of Homomorphism to prove that $\mathbf{C}^*/S \simeq \mathbf{R}^+$, where $(\mathbf{C}^*, \cdot)$ is the group of non-zero complex numbers, $S = \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z| = 1\}$, $(R^+, \cdot)$ is the group of positive real numbers. *5*

(c) List all the distinct proper ideals of $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. *2*

5. Which of the following statements are *true* and which are *false* ? Justify your answers either with a short proof or with a counter-example. *10*

(a) If G is a group of order 12, then G has no element of order 5.

(b) Every non-trivial subgroup of an infinite group is infinite.

(c) The quotient field of $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ has characteristic 3.

(d) The sum of units of an integral domain D, is a unit in D.

(e) Every finite ring is a field.

6. (a) Let S be a set with at least 3 elements and B be the set of bijective mappings of S onto itself. Prove that $(B, \circ)$ is a group. Also check if $(B, \circ)$ is abelian or not. *5*

(b) Let $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$. Show that S is a ring with identity with the operations defined by

$$(x, y) + (u, v) = (x + y, u + v),$$
$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$ *5*

7. (a) Consider the ring $R = \mathbf{Z}_2[x]/< x^8 - 1 >$.

(i) Is R a finite ring ?

(ii) Does R have zero divisors ?

(iii) Does R have nilpotent elements ?

Justify your answers. *6*

(b) Let

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, d \in \mathbf{R}, ad \neq 0 \right\}.$$

Show that

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \, b \in \mathbf{R} \right\}$$

is a normal subgroup of G. Also give two distinct elements of G/H. *4*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-06 : अमूर्त बीजगणित

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *प्रश्न सं. 5 करना **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. 1 – 4, 6 और 7 में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. (क) गणितीय आगमन का प्रयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि $10^{n+1} + 10^n + 1$, 3 से विभाज्य है, $\forall\ n \geq 1$. *3*

(ख) जाँच कीजिए कि कोटि 44 वाले किसी भी समूह का एक उचित प्रसामान्य उपसमूह है या नहीं । *3*

(ग) $x^2 - (1, 1) \in R[x]$ के R में सभी मूल ज्ञात कीजिए, जहाँ $R = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ है । यह भी ज्ञात कीजिए कि $x^2 - (2, 1) \in R[x]$ के कितने मूल R में हैं । *4*

2. (क) यदि G कोटि 36 वाला एक समूह है तथा H और K क्रमशः 18 और 9 कोटियों वाले इसके उपसमूह हैं, तो दर्शाइए कि HK, G का उपसमूह है । साथ ही, यह भी दर्शाइए कि $o(H \cap K) \geq 3$ है । 4

(ख) मान लीजिए $R = \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$, वास्तविक संख्याओं की प्रविष्टियों वाले 2×2 आव्यूहों की वलय है । दो ऐसे शून्येतर अवयव $x, y \in R$ ज्ञात कीजिए कि $xy = 0$ हो और $yx \neq 0$ हो । साथ ही, इसकी भी जाँच कीजिए कि समुच्चय $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbf{R} \right\}$, R की एक गुणजावली है या नहीं । 4

(ग) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ का चिह्नक ज्ञात कीजिए । 2

3. (क) वलय $\mathbf{Z}$ पर विचार कीजिए । मान लीजिए $I = 4\mathbf{Z}$ और $J = 6\mathbf{Z}$ है । क्या $IJ = I \cap J$ है ? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए । साथ ही, यदि $I + J = \langle a \rangle$ है, तो a ज्ञात कीजिए । 3

(ख) पुष्टि देते हुए, बहुपद वलय $\mathbf{R}[x]$ की दो अलग-अलग उच्चिष्ठ गुणजावलियाँ दीजिए । 3

(ग) मान लीजिए $S = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \,\middle|\, (q, 5) = 1 \right\}$ है । $\frac{p}{q} \sim \frac{r}{s}$ iff $S \mid (ps - qr)$ द्वारा S पर एक संबंध '$\sim$' परिभाषित कीजिए । दर्शाइए कि '$\sim$' एक तुल्यता संबंध है । साथ ही, 0 का तुल्यता वर्ग भी ज्ञात कीजिए । 4

4. (क) मान लीजिए यूक्लिडीय मूल्यांकन d के साथ D एक यूक्लिडीय प्रांत है । सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक ऐसे पूर्णांक n के लिए जिससे कि $d(1) + n \geq 0$ हो, तो फलन $f_n : D \setminus \{0\} \to \mathbf{Z} : f_n(a) = d(a) + n$, D पर एक यूक्लिडीय मूल्यांकन है । *3*

(ख) $\mathbf{C}^*/S \simeq \mathbf{R}^+$ सिद्ध करने के लिए समाकारिता के मूल प्रमेय का प्रयोग कीजिए, जहाँ $(\mathbf{C}^*, \cdot)$ शून्येतर सम्मिश्र संख्याओं का समूह है, $S = \{z \in \mathbf{C}^* \mid |z| = 1\}$, $(R^+, \cdot)$ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समूह है । *5*

(ग) $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ की सभी अलग-अलग उचित गुणजावलियों की सूची बनाइए । *2*

5. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* हैं और कौन-से कथन *असत्य* ? एक संक्षिप्त उपपत्ति देकर या एक प्रत्युदाहरण देकर, अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । *10*

(क) यदि G कोटि 12 वाला एक समूह है, तो G में कोटि 5 वाला कोई अवयव नहीं होगा ।

(ख) किसी अपरिमित समूह का प्रत्येक अतुच्छ उपसमूह अपरिमित होता है ।

(ग) $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ के विभाग क्षेत्र का अभिलक्षणिक 3 है ।

(घ) किसी भी पूर्णांकीय प्रांत D की इकाइयों का योगफल D में एक इकाई होता है ।

(ङ) प्रत्येक परिमित वलय एक क्षेत्र होता है ।

6. (क) मान लीजिए S कम-से-कम 3 अवयवों वाला एक समुच्चय है तथा B, S के स्वयं पर एकैकी आच्छादक फलनों का समुच्चय है । सिद्ध कीजिए कि (B, o) एक समूह है । इसकी भी जाँच कीजिए यदि (B, o) आबेली है या नहीं । 5

(ख) मान लीजिए $S = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ है । दर्शाइए कि S निम्नलिखित संक्रियाओं द्वारा परिभाषित एक तत्समकी वलय है : 5

$$(x, y) + (u, v) = (x + y, u + v),$$
$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

7. (क) वलय $R = \mathbf{Z}_2[x]/< x^8 - 1 >$ पर विचार कीजिए ।

(i) क्या R एक परिमित वलय है ?

(ii) क्या R के शून्य के विभाजक हैं ?

(iii) क्या R के शून्यंभावी अवयव हैं ?

अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । 6

(ख) मान लीजिए

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \middle| \, a, b, d \in \mathbf{R}, ad \neq 0 \right\}$$ है ।

दर्शाइए कि $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \, b \in \mathbf{R} \right\}$ G का एक प्रसामान्य उपसमूह है । इसके आगे, G/H के दो अलग-अलग अवयव भी दीजिए । 4