BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

04505 June, 2018

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Attempt* ***five*** *questions in all. Question no.* ***7*** *is* ***compulsory****. Answer any* ***four*** *questions from questions no.* ***1*** *to* ***6****. Use of calculators is* ***not*** *allowed.*

1. (a) Check that the set

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 2x_3\}$$

is a subspace of $\mathbf{R}^4$. Find a basis of W. Hence, find the dimension of W. 5

(b) Let $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ be the linear transformation defined by

$$T(x, y, z) = (2x + y - z,\ x + y,\ x + z).$$

Find the matrix of the transformation with respect to the ordered basis $\{v_1, v_2, v_3\}$, where $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ and $v_3 = (1, 0, 0)$. Is T invertible or not ? Justify your answer. 5

2. (a) Let $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ be the linear transformation defined by

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3).$$

Check that $T^4 = I$. Also, find the minimal polynomial of T. 5

(b) Find the inverse of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

using row reduction. 5

3. (a) Check whether the following system of equations can be solved using Cramer's rule :

$$2x + 3y + z = 11$$
$$x + y + 2z = 6$$
$$2x - y + 2z = 4$$

If the system can be solved by the rule, then use it to obtain the solution. If the system cannot be solved using Cramer's rule, use Gaussian elimination to solve it. 5

(b) Find the radius and the centre of the circular section of the sphere $|\mathbf{r}| = 4$, cut off by the plane $\mathbf{r} \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 3$. 5

4. (a) Check whether or not the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

is diagonalisable. 5

(b) Check that $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, defined by

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 - x_3)$$

is a linear operator. Also find the null space of T. 5

5. (a) Check whether the function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, defined by $f(x) = x^3 + 1$, is $1-1$. Is it onto ? Justify your answers. 4

(b) Consider the linear operator $T : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$, defined by $T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (-iz_2, iz_1, -iz_4, z_3)$. Find $T^*(w_1, w_2, w_3, w_4)$, where $w_i \in \mathbf{C}\ \forall\ i = 1, 2, 3, 4$ and check whether T is self-adjoint under the standard inner product on $\mathbf{C}^4$. Further, check whether T is unitary. 6

6. (a) Find the orthogonal canonical reduction of the quadratic form $-x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2yz$. Also, find its principal axes. 7

(b) Check whether or not $\dfrac{\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{\mathbf{i}-\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$ and $\dfrac{\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}}{\sqrt{6}}$ form an orthonormal basis for $\mathbf{R}^3$. 3

7. Which of the following statements are *True* and which are *False* ? Justify your answers with a short proof or by a counter-example. *5×2=10*

(a) The relation ~ defined in **R** by 'x ~ y if x ≥ y' is an equivalence relation.

(b) There is no system of linear equations over **R** that has exactly two solutions.

(c) If the characteristic polynomials of two matrices are equal, their minimal polynomials are also equal.

(d) The determinant of any unitary matrix is 1.

(e) Any two real quadratic forms of the same rank are equivalent over **R**.

एम.टी.ई.-02

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न सं. **7 अनिवार्य** है । प्रश्न सं. **1** से **6** में से किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. (क) जाँच कीजिए कि क्या समुच्चय

$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 = 2x_3\}$, $\mathbf{R}^4$

की एक उपसमष्टि है । W का एक आधार ज्ञात कीजिए । अतः, W की विमा ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) मान लीजिए $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$

$T(x, y, z) = (2x + y - z, \ x + y, \ x + z)$ द्वारा

परिभाषित एक रैखिक रूपांतरण है । क्रमित आधार $\{v_1, v_2, v_3\}$, जहाँ $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ और $v_3 = (1, 0, 0)$ के सापेक्ष रूपांतरण का आव्यूह ज्ञात कीजिए । क्या T व्युत्क्रमणीय है या नहीं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *5*

2. (क) मान लीजिए $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$,

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3)$$

द्वारा परिभाषित रैखिक रूपांतरण है । जाँच कीजिए कि $T^4 = I$ है या नहीं । T का अल्पिष्ठ बहुपद भी ज्ञात कीजिए । 5

(ख) पंक्ति समानयन से आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए । 5

3. (क) जाँच कीजिए कि क्या निम्नलिखित समीकरणों का निकाय क्रेमर नियम से हल किया जा सकता है या नहीं :

$$2x + 3y + z = 11$$
$$x + y + 2z = 6$$
$$2x - y + 2z = 4$$

यदि निकाय इस नियम से हल किया जा सकता है, तो हल प्राप्त करने के लिए इसका प्रयोग कीजिए । यदि निकाय को क्रेमर नियम से हल नहीं किया जा सकता, तो इसे हल करने के लिए गाउसीय निराकरण का प्रयोग कीजिए । 5

(ख) समतल $\mathbf{r} \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 3$ द्वारा गोले $|\mathbf{r}| = 4$ के काटे गए वृत्तीय परिच्छेद की त्रिज्या और केंद्र ज्ञात कीजिए । 5

4. (क) जाँच कीजिए कि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

विकर्णनीय है या नहीं । 5

(ख) जाँच कीजिए कि $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 - x_3)$$

से परिभाषित, एक रैखिक संकारक है । T की शून्य समष्टि भी ज्ञात कीजिए । 5

5. (क) जाँच कीजिए कि क्या फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + 1$ से परिभाषित, $1 - 1$ है । क्या यह आच्छादक है ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । 4

(ख) रैखिक संकारक $T : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ को लीजिए जो कि $T(z_1, z_2, z_3, z_4) = (-iz_2, iz_1, -iz_4, z_3)$ से परिभाषित है । $T^*(w_1, w_2, w_3, w_4)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $w_i \in \mathbf{C}\ \forall\ i = 1, 2, 3, 4$ और जाँच कीजिए कि क्या T, $\mathbf{C}^4$ पर मानक आंतर गुणनफल के सापेक्ष स्वसंलग्न है । इसके आगे, जाँच कीजिए कि क्या T ऐकिक है । 6

6. (क) द्विघाती समघात $-x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2yz$ का लांबिक विहित समानयन ज्ञात कीजिए । इसके मुख्य अक्ष भी ज्ञात कीजिए । 7

(ख) जाँच कीजिए कि क्या $\dfrac{\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{3}}$, $\dfrac{\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$ और $\dfrac{\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{6}}$, $\mathbf{R}^3$ का प्रसामान्य लांबिक आधार बनाते हैं या नहीं । 3

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन *सत्य* और कौन-से कथन *असत्य* हैं ? अपने उत्तरों की एक लघु उपपत्ति या एक प्रत्युदाहरण से पुष्टि कीजिए । *5×2=10*

(क) संबंध ~, **R** में '$x \sim y$ यदि $x \geq y$' से परिभाषित, एक तुल्यता संबंध है ।

(ख) **R** पर ऐसा कोई भी रैखिक समीकरणों का निकाय नहीं है, जिसके ठीक-ठीक दो हल हों ।

(ग) यदि दो आव्यूहों के अभिलक्षणिक बहुपद समान हैं, तो उनके अल्पिष्ठ बहुपद भी समान होंगे ।

(घ) किसी भी ऐकिक आव्यूह की सारणिक 1 होती है ।

(ङ) समान जाति वाली कोई भी दो वास्तविक द्विघाती समघात **R** पर तुल्य होती हैं ।