

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME**(BDP)****Term-End Examination****June, 2018**

05695

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS**MTE-01 : CALCULUS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : Question no. 1 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from questions no. 2 to 7. Use of calculators is **not** allowed.

1. Which of the following statements are *True* and which are *False* ? Justify your answers. 5×2=10

(a) The function f , defined on \mathbf{R} by

$$f(x) = \ln \left| \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right|,$$

is an even function.

(b) The tangent to the curve, $x^3 + 6y^2 + 5x = 0$, at $(-1, 1)$ is perpendicular to the y -axis.

(c) $\frac{d}{dx} \left(\int_1^{\sqrt{x}} \tan^2(t^2) dt \right) = \frac{\tan^2 x}{(\sqrt{x} - 1)}$, for $x \in]1, \infty [$.

(d) The graph of the function, $y = x + |x| \forall x \in \mathbf{Q}$, is strictly increasing.

(e) Every integrable function is differentiable.

2. (a) Evaluate

$$\int \sqrt{1 + \sqrt{x}} \, dx. \quad 3$$

(b) Using the Trapezoidal rule, evaluate

$$\int_2^{12} \frac{dx}{x^2 - 2}, \text{ dividing the interval } [2, 12]$$

into 5 equal intervals. 3

(c) Find the derivative of

$$(\sin x)^{\cos x} + (\operatorname{cosec} x)^{\cot x}$$

with respect to x . 4

3. (a) Let a function f be defined as

$$f(x) = \begin{cases} a^2x, & \text{if } x > 1 \\ 5ax - 4, & \text{if } x \leq 1. \end{cases}$$

Determine the value(s) of a , if any, for which f is continuous over \mathbf{R} . 3

(b) Evaluate

$$\int \frac{x - 2}{x^2 - 6x + 10} \, dx. \quad 3$$

- (c) If $y = (\sin^{-1} x)^2$, check whether or not the following is true : 4

$$(1 - x^2) y_{n+2} - 2nx y_{n+1} - n^2 y_n = 0$$

4. (a) Determine the points of inflection of the curve, $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 1$, if any. 3

- (b) Show that

$$\int_a^b \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln ab \ln \left(\frac{a}{b} \right). \quad 3$$

- (c) Find the surface area of the solid formed by the rotation of an arc of the cycloid

$$x = a(\theta + \sin \theta), \quad y = a(1 + \cos \theta)$$

about the axis of x . 4

5. (a) Find the maximum possible domain and corresponding range, of the function f defined by $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-2)}$. 3

- (b) Find the angle of intersection between the curves $x^2 + 2xy - y^2 + 2ax = 0$ and $3y^3 - 2a^2x - 4a^2y + a^3 = 0$ at the point $(a, -a)$. 3

- (c) Find the length of the curve, $2y^2 = x^3$ from the vertex $(0, 0)$ to the point $(4, 4\sqrt{2})$. 4

6. (a) Check whether the function f , defined on \mathbf{R} by

$$f(x) = \operatorname{cosec} 2x + \cot x,$$

is periodic or not. If so, find its period. If it is not periodic, check whether it is even. 2

- (b) Using Lagrange's mean value theorem, prove that

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, \quad (x > 0). \quad 4$$

- (c) Find all the maxima and minima of the function f given by 4

$$f(x) = \int_2^x [3(t-2)(t-3)^3 + 2(t-2)^2(t-3)^2] dt.$$

7. (a) If

$$I_n = \int \operatorname{cosec}^n x \, dx, \quad n > 1,$$

then show that

$$(n-1) I_n = -\cot x \operatorname{cosec}^{n-2} x - (n-2) I_{n-2}.$$

$$\text{Hence obtain } \int \operatorname{cosec}^4 x \, dx. \quad 5$$

- (b) Find all the asymptotes of the curve, $x^3 + y^3 = 3axy$, where $a > 0$. 3
- (c) Does \mathbf{N} satisfy the Archimedean property? Justify your answer. 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2018

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरो का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। 5×2=10

(क) \mathbf{R} पर $f(x) = \ln \left| \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right|$ द्वारा परिभाषित फलन f एक सम फलन है।

(ख) वक्र $x^3 + 6y^2 + 5x = 0$ की $(-1, 1)$ पर स्पर्शरेखा y -अक्ष पर लंब है।

(ग) $x \in]1, \infty[$ के लिए,

$$\frac{d}{dx} \left(\int_1^{\sqrt{x}} \tan^2(t^2) dt \right) = \frac{\tan^2 x}{(\sqrt{x} - 1)}$$

(घ) फलन $y = x + |x| \forall x \in \mathbf{Q}$ का लेखाचित्र निरंतर वर्धमान है ।

(ङ) प्रत्येक समाकलनीय फलन अवकलनीय होता है ।

2. (क) $\int \sqrt{1 + \sqrt{x}} dx$ का मूल्यांकन कीजिए । 3

(ख) अंतराल $[2, 12]$ को 5 बराबर अंतरालों में विभाजित करके, समलंबी नियम का प्रयोग करके, $\int_2^{12} \frac{dx}{x^2 - 2}$ का मूल्यांकन कीजिए । 3

(ग) $(\sin x)^{\cos x} + (\operatorname{cosec} x)^{\cot x}$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए । 4

3. (क) मान लीजिए फलन f निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} a^2x, & \text{यदि } x > 1 \\ 5ax - 4, & \text{यदि } x \leq 1. \end{cases}$$

a के वे मान, यदि हैं, ज्ञात कीजिए जिनके लिए \mathbf{R} पर फलन f संतत है । 3

(ख) $\int \frac{x-2}{x^2-6x+10} dx$ का मूल्यांकन कीजिए । 3

(ग) यदि $y = (\sin^{-1} x)^2$, तो जाँच कीजिए कि निम्नलिखित सत्य है या नहीं : 4

$$(1 - x^2) y_{n+2} - 2nx y_{n+1} - n^2 y_n = 0$$

4. (क) वक्र $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 1$ के नति परिवर्तन बिंदु, यदि हैं, तो ज्ञात कीजिए । 3

(ख) दर्शाइए कि

$$\int_a^b \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln ab \ln \left(\frac{a}{b} \right). \quad 3$$

(ग) चक्रज $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 + \cos \theta)$ के एक चाप को x -अक्ष के सापेक्ष घूर्णन से जनित ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 4

5. (क) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-2)}$ द्वारा परिभाषित फलन f का अधिकतम संभव प्रांत और तदनुसार गोचर ज्ञात कीजिए । 3

(ख) वक्रों $x^2 + 2xy - y^2 + 2ax = 0$ और $3y^3 - 2a^2x - 4a^2y + a^3 = 0$ का बिंदु $(a, -a)$ पर प्रतिच्छेद-कोण ज्ञात कीजिए । 3

(ग) वक्र $2y^2 = x^3$ की शीर्ष $(0, 0)$ से बिंदु $(4, 4\sqrt{2})$ तक की लंबाई ज्ञात कीजिए । 4

6. (क) जाँच कीजिए कि \mathbf{R} पर $f(x) = \operatorname{cosec} 2x + \cot x$ द्वारा परिभाषित फलन f आवर्ती है या नहीं। यदि है, तो इसका आवर्तक ज्ञात कीजिए। यदि यह आवर्ती नहीं है, तो जाँच कीजिए कि यह सम है या नहीं। 2

- (ख) लग्रांज के माध्यमान प्रमेय का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x, (x > 0). \quad 4$$

- (ग) $f(x) = \int_2^x [3(t-2)(t-3)^3 + 2(t-2)^2(t-3)^2] dt$

द्वारा परिभाषित फलन f के सभी उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए। 4

7. (क) यदि

$$I_n = \int \operatorname{cosec}^n x \, dx, \quad n > 1,$$

तो दर्शाइए कि

$$(n-1) I_n = -\cot x \operatorname{cosec}^{n-2} x - (n-2) I_{n-2}.$$

इस प्रकार, $\int \operatorname{cosec}^4 x \, dx$ प्राप्त कीजिए। 5

- (ख) वक्र $x^3 + y^3 = 3axy$, जहाँ $a > 0$, की सभी अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए। 3

- (ग) क्या \mathbf{N} आर्किमीडी गुण संतुष्ट करता है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 2