01195

No. of Printed Pages : 15

BPHE-104/PHE-04/PHE-05

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination, June, 2018

BPHE-104/PHE-04 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-I

&

PHE-05 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-II

Instructions :

(i) Students registered for both BPHE-104/PHE-04 and PHE-05 courses should answer both the question papers in two separate answer books entering their enrolment number, course code and course title clearly on both the answer books.

(ii) Students who have registered for BPHE-104/PHE-04 or PHE-05 should answer the relevant question paper after entering their enrolment number, course code and course title on the answer book.

बी.पी.एच.ई.-104/पी.एच.ई.-04/पी.एच.ई.-05

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा, जून, 2018

बी.पी.एच.ई.-104/पी.एच.ई.-04 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-I

एवं

पी.एच.ई.-05 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-II

निर्देश :

(i) जो छात्र बी.पी.एच.ई.-104/पी.एच.ई.-04 और पी.एच.ई.-05 दोनों पाठ्यक्रमों के लिए पंजीकृत हैं, दोनों प्रश्न-पत्रों के उत्तर अलग-अलग उत्तर पुस्तिकाओं में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ़-साफ़ लिखकर दें ।

(ii) जो छात्र बी.पी.एच.ई.-104/पी.एच.ई.-04 या पी.एच.ई.-05 किसी एक के लिए पंजीकृत हैं, अपने उसी प्रश्न-पत्र के उत्तर, उत्तर पुस्तिका में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ़-साफ़ लिखकर दें ।

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

June, 2018

PHYSICS

BPHE-104/PHE-04 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-I

Time : $1\frac{1}{2}$ hours *Maximum Marks : 25*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. You may use log tables or calculators. Symbols have their usual meanings.*

1. Answer any ***three*** parts : *3×4=12*

(a) Calculate the volume of a parallelopiped having sides

$$\vec{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}},$$

$$\vec{\mathbf{b}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}} \text{ and}$$

$$\vec{\mathbf{c}} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}.$$

(b) Show that for a scalar field $\phi(x, y, z)$,

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0.$$

(c) Define a solenoidal vector field. Determine the constant 'a' so that the vector field $\vec{A} = (2x + 3y)\hat{i} + (y - 3z)\hat{j} + (x + az)\hat{k}$ is solenoidal. Show that $\vec{A}$ is not conservative.

(d) Express $\vec{v} = \frac{y\hat{i} - x\hat{j}}{x^2 + y^2}$ in cylindrical polar coordinates.

(e) Determine the unit tangent vector at a point on the curve C defined by $\vec{r} = xy\hat{i} - z\hat{j} + x^2\hat{k}$, where $x = t^2$, $y = 2t$, and $z = t^3$.

2. State Stokes' theorem and use it to obtain the value of curl $\vec{B}$, starting from Ampere's law, $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$, where l defines the periphery of surfaces. 5

OR

Calculate the work done by the force $\vec{F} = z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k}$ in moving a particle along the curve $x = \cos t$, $y = \sin t$ and $z = 3t$ for $0 \leq t < 2\pi$. 5

3. Determine the mean and variance of the normal distribution defined by $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$. 5

OR

A student measures temperature (in °C) of a body and obtains five values at different times in an experiment : 25, 27, 26, 28, 24. Calculate the arithmetic mean and its standard error. 5

4. Calculate the probability of getting 3 heads in a toss of 5 ideal coins. 3

OR

The average number of phone calls received by a telephone exchange per minute between 2 a.m. and 3 a.m. is 2. Identify the probability distribution that applies in this case. Calculate the probability that during one minute, chosen at random, there will be one incoming phone call. 1+2

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2018

भौतिक विज्ञान

बी.पी.एच.ई.-104/पी.एच.ई.-04 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-I

समय : $1\frac{1}{2}$ घण्टे *अधिकतम अंक : 25*

नोट : ***सभी*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं । आप लॉग सारणियों अथवा कैल्कुलेटरों का प्रयोग कर सकते हैं । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

---

1. किन्हीं ***तीन*** भागों के उत्तर दीजिए : *3×4=12*

(क) एक समांतर षट्फलक का आयतन परिकलित कीजिए जिसकी भुजाएँ निम्नवत् हैं :

$$\vec{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}},$$

$$\vec{\mathbf{b}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}} \text{ तथा}$$

$$\vec{\mathbf{c}} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}.$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि अदिश क्षेत्र $\phi(x, y, z)$ के लिए

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0.$$

(ग) परिनालिकीय सदिश क्षेत्र की परिभाषा दीजिए । अचर 'a' का वह मान ज्ञात कीजिए जिससे सदिश क्षेत्र $\vec{A} = (2x + 3y)\hat{i} + (y - 3z)\hat{j} + (x + az)\hat{k}$ परिनालिकीय हो । सिद्ध कीजिए कि $\vec{A}$ असंरक्षी है ।

(घ) $\vec{v} = \frac{y\hat{i} - x\hat{j}}{x^2 + y^2}$ को बेलनी ध्रुवीय निर्देशांकों में व्यक्त कीजिए ।

(ङ) वक्र C, जो सदिश $\vec{r} = xy\hat{i} - z\hat{j} + x^2\hat{k}$ द्वारा परिभाषित है जहाँ $x = t^2$, $y = 2t$ एवं $z = t^3$, के किसी बिंदु पर एकक स्पर्शी सदिश ज्ञात कीजिए ।

2. स्टोक्स प्रमेय का कथन लिखिए तथा इसका प्रयोग करते हुए ऐम्पियर नियम $\oint_l \vec{B} . d\vec{l} = \mu_0 I$ से प्रारंभ करके curl $\vec{B}$ का मान प्राप्त कीजिए, जहाँ l पृष्ठ की परिधि को परिभाषित करता है । 5

अथवा

बल $\vec{F} = z\hat{i} + x\hat{j} + y\hat{k}$ द्वारा एक कण को $0 \leq t < 2\pi$ के लिए वक्र $x = \cos t$, $y = \sin t$ तथा $z = 3t$ के अनुदिश ले जाने में किया गया कार्य परिकलित कीजिए । 5

3. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$ द्वारा परिभाषित प्रसामान्य बंटन के माध्य और प्रसरण ज्ञात कीजिए । 5

अथवा

एक छात्र एक प्रयोग में किसी निकाय का ताप प्रेक्षित करता है तथा विभिन्न समयों पर पाँच मान (°C में) प्राप्त करता है : 25, 27, 26, 28, 24. इन प्रेक्षणों का समांतर माध्य एवं उसकी मानक त्रुटि की गणना कीजिए । 5

4. 5 आदर्श सिक्के उछालने पर 3 चित प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 3

अथवा

एक टेलीफ़ोन केंद्र पर रात के 2 बजे से 3 बजे तक प्रति मिनट औसतन 2 फ़ोन कॉल प्राप्त होते हैं । इस स्थिति पर लागू होने वाले प्रायिकता बंटन का नाम लिखिए । यादृच्छिकत: लिए गए एक मिनट के अंतराल में 1 फ़ोन कॉल के प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 1+2

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

June, 2018

PHYSICS

PHE-05 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-II

Time : $1\frac{1}{2}$ hours *Maximum Marks : 25*

Note : ***All*** *questions are* ***compulsory****. However, internal choices are given. The marks for each question are indicated against it. You may use log tables or non-programmable calculators.*

1. Answer any ***three*** parts : *3×5=15*

(a) Solve the equation

$$(y + 2)\frac{dy}{dx} + x = 0 \text{ and}$$

plot your result in x-y plane.

(b) The general solution of the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$$

is $y(x) = A \sin 3x + B \cos 3x$.

Identify its two solutions and state the condition for their linear independence. Are these solutions linearly independent ? Justify your answer by working out steps.

(c) Classify the singular points of the equation

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

and obtain the corresponding indicial equation.

(d) The steady state temperature distribution in a control rod in a nuclear reactor is given by

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

Use the method of separation of variables to reduce it to a set of ODEs.

(e) Define the order and degree of a PDE. Write down the orders and degrees of the following PDEs :

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = 0$$

$$x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = e^{xy}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} - 6\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4 = 0$$

2. Consider two identical pendulums whose bobs are coupled by a spring of stiffness constant k. Write down the equations of motion of these pendulums and solve these by decoupling them. Show that the frequencies of their oscillation will be either equal to or greater than the natural frequency of their oscillation. 5

OR

Consider a series RC circuit. When a sinusoidally varying emf is applied to it, the charge in the circuit can be described by the equation

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E_0}{R} \sin \omega t$$

Show that the charge in the circuit is given by

$$q(t) = \frac{E_0 C}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t - \theta) + C_1 \, e^{-t/RC}$$

where C_1 is a constant. 5

3. Obtain the Fourier sine series for exp (x) on the interval $0 \leq x < 1$. 5

OR

The general solution of the wave equation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ is given by

$u(x, t) = (A \cos mx + B \sin mx)(C \cos mvt + D \sin mvt)$, where m is a constant.

Obtain the particular solution under the following conditions :

(i) $u = 0$, when $x = 0$ and $x = \pi$

(ii) $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, when $t = 0$

(iii) $u(x, 0) = 2 \sin x$, $0 < x < \pi$ 5

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2018

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-05 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-II

समय : $1\frac{1}{2}$ घण्टे *अधिकतम अंक : 25*

नोट : ***सभी*** *प्रश्न* ***अनिवार्य*** *हैं । परन्तु, आंतरिक विकल्प दिए गए हैं । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं । आप लॉग सारणियों या अप्रोग्रामीय कैल्कुलेटरों का प्रयोग कर सकते हैं ।*

---

1. किन्हीं ***तीन*** भागों के उत्तर दीजिए : *3×5=15*

(क) समीकरण

$$(y + 2)\frac{dy}{dx} + x = 0$$

हल कीजिए तथा अपने परिणाम को x-y समतल में आरेखित कीजिए ।

(ख) समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$$

का व्यापक हल है :

$y(x) = A \sin 3x + B \cos 3x.$

इस समीकरण के दो हल कौन-कौन-से हैं तथा उनकी रैखिक स्वतन्त्रता का प्रतिबंध लिखिए । क्या ये हल रैखिकत: स्वतन्त्र हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि करने के लिए सभी चरण दिखाइए ।

(ग) समीकरण

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

के विचित्र बिन्दु वर्गीकृत कीजिए तथा इसके संगत घातांकी समीकरण प्राप्त कीजिए ।

(घ) नाभिकीय रिऐक्टर में प्रयुक्त नियंत्रण दंड का स्थायी अवस्था ताप बंटन समीकरण निम्नवत् है :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

चर पृथक्करण विधि द्वारा इसे साधारण अवकल समीकरणों के समुच्चय में समानीत कीजिए ।

(ङ) एक आंशिक अवकल समीकरण की कोटि एवं घात परिभाषित कीजिए । निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरणों की कोटि एवं घात लिखिए :

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = 0$$

$$x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = e^{xy}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} - 6\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4 = 0$$

2. दो ऐसे समतुल्य लोलकों की कल्पना कीजिए जिनके गोलक k दुर्नम्यता गुणांक की कमानी से युग्मित हैं । इन लोलकों के गति समीकरण लिखिए तथा इन्हें वियुग्मित कर हल कीजिए । सिद्ध कीजिए कि इनकी दोलन आवृत्तियाँ उनकी प्राकृतिक आवृत्ति के या तो बराबर होंगी या उससे अधिक । 5

अथवा

एक श्रेणी RC परिपथ की कल्पना कीजिए । जब एक ज्यावक्रीय विद्युत्-वाहक बल लगाया जाता है, तो परिपथ में आवेश का निम्नलिखित समीकरण है :

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E_0}{R} \sin \omega t$$

सिद्ध कीजिए कि परिपथ में आवेश का व्यंजक निम्नवत् होता है :

$$q(t) = \frac{E_0 C}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t - \theta) + C_1 \, e^{-t/RC}$$

जहाँ C_1 अचर है । 5

3. अंतराल $0 \leq x < 1$ में $\exp(x)$ फलन की फूरिये साइन श्रेणी प्राप्त कीजिए । 5

अथवा

तरंग समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ का व्यापक हल निम्नलिखित है :

$u(x, t) = (A \cos mx + B \sin mx)(C \cos mvt + D \sin mvt)$,

जहाँ m अचर है ।

निम्नलिखित प्रतिबंधों के लिए इसका विशेष हल प्राप्त कीजिए :

(i) $u = 0$, $x = 0$ और $x = \pi$ के लिए

(ii) $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $t = 0$ के लिए

(iii) $u(x, 0) = 2 \sin x$, $0 < x < \pi$ 5