No. of Printed Pages : 8

PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

June, 2017

00302

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

1. Attempt any ***five*** parts : *5×2=10*

(a) Show that the following matrix A is orthogonal :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(b) If δ_{ij} is the Kronecker delta function, then expand $\delta_{ij}\, x_i\, x_j$ in a 3-dimensional space.

(c) Show that Euler's formula is valid for complex numbers.

(d) Does the set of all real numbers form a group under addition ? Explain.

(e) Locate and name the singularities of the function $\frac{\ln(z+3i)}{z^2}$ in the finite z-plane.

(f) Determine the Laplace transform of the function e^{-at}.

(g) Determine the Fourier transform of the following function :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\omega_0 t} & t \geq 0, \omega_0 > 0 \end{cases}$$

(h) Using the orthogonality relation for Legendre's polynomials

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\, \delta_{mn},$$ show that

$$\int_{-1}^{+1} x\, P_n(x)\, dx = \frac{2}{3} \quad \text{for} \quad n = 1$$

and zero otherwise.

2. Attempt any *two* parts : *2×5=10*

(a) Verify the Cayley-Hamilton theorem for the matrix :

$$\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta\, e^{-i\phi} \\ \cos\theta\, e^{i\phi} & -\sin\theta \end{bmatrix}$$

(b) Show that every eigenvalue of a unitary matrix is of unit modulus.

(c) Show that the roots of the equation $z^4 - 1 = 0$ form a cyclic group of order 4.

3. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Evaluate the integral :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$$

(b) Obtain the Laurent series expansion of the function $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ about $z = 1$.

(c) Calculate the value of the contour integral $\oint \dfrac{dz}{z^3(z+4)}$, where C is the circle $|z| = 2$.

4. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(a) Obtain Fourier's transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(b) Calculate the inverse Laplace transform of the function $F(s) = \dfrac{5}{s^2 + 5s + 4}$.

(c) Use the Laplace transform to solve the initial value problem :

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \;\; y(0) = 3, \;\; y'(0) = 1$$

5. Attempt any *one* part : *1×10=10*

(a) Using the generating function for the Bessel function

$$g(x, t) \equiv \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n,$$

prove that

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = 2\frac{n}{x} J_n(x).$$

Also, show that for $t = 1$, the generating function for Bessel's function is

$$J_0(x) + 2\,J_2(x) + 2\,J_4(x) + \ldots = 1.$$

(b) Derive the Rodrigues formula for Hermite polynomials

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Also, show that

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2017

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : ***सभी*** *प्रश्न कीजिए । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।*

1. कोई ***पाँच*** भाग कीजिए : *5×2=10*

(क) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित आव्यूह A लांबिक है :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(ख) यदि δ_{ij} एक क्रोनेकर डेल्टा फलन है, तो $\delta_{ij}\, x_i\, x_j$ का त्रिविम समष्टि में प्रसार कीजिए ।

(ग) सिद्ध कीजिए कि ऑयलर सूत्र सम्मिश्र संख्याओं के लिए मान्य है ।

(घ) क्या सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय, योग नियम के तहत समूह है ? स्पष्ट कीजिए ।

(ङ) सीमित z-समतल में फलन $\frac{ln(z+3i)}{z^2}$ की विचित्रताओं को निर्धारित कीजिए और उनके नाम बताइए ।

(च) फलन e^{-at} का लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए ।

(छ) निम्नलिखित फलन का फूरिये रूपांतर ज्ञात कीजिए :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\omega_0 t} & t \geq 0, \omega_0 > 0 \end{cases}$$

(ज) लेजान्ड्रे बहुपदों के लांबिकता संबंध

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\, \delta_{mn},$$

का उपयोग करके, सिद्ध कीजिए कि

$\int_{-1}^{+1} x\, P_n(x)\, dx = \frac{2}{3}$, $n = 1$ के लिए और अन्यथा शून्य ।

2. कोई ***दो*** भाग कीजिए : *2×5=10*

(क) निम्नलिखित आव्यूह के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित कीजिए :

$$\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta\, e^{-i\phi} \\ \cos\theta\, e^{i\phi} & -\sin\theta \end{bmatrix}$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि ऐकिक आव्यूह का प्रत्येक आइगेनमान एकक मापांक वाला होता है ।

(ग) सिद्ध कीजिए कि समीकरण $z^4 - 1 = 0$ के मूल कोटि 4 का चक्रीय समूह बनाते हैं ।

3. कोई *दो* भाग कीजिए : $2 \times 5 = 10$

(क) निम्नलिखित समाकल का मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 4}$$

(ख) $z = 1$ के प्रति फलन $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ का लौराँ श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए ।

(ग) कंटूर समाकल $\oint \dfrac{dz}{z^3 (z+4)}$ का मान परिकलित कीजिए, जहाँ C एक वृत्त $|z| = 2$ है ।

4. कोई *दो* भाग कीजिए : $2 \times 5 = 10$

(क) फलन का फूरिये रूपांतर प्राप्त कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

(ख) फलन $F(s) = \dfrac{5}{s^2 + 5s + 4}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर परिकलित कीजिए ।

(ग) लाप्लास रूपांतर का उपयोग कर निम्नलिखित आदि मान समस्या को हल कीजिए :

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \;\; y(0) = 3, \;\; y'(0) = 1$$

5. कोई ***एक*** भाग कीजिए : *1×10=10*

(क) बेसल फलन के जनक फलन

$$g(x, t) \equiv \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

का उपयोग कर, सिद्ध कीजिए कि

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = 2\frac{n}{x} J_n(x).$$

यह भी सिद्ध कीजिए कि $t = 1$ के लिए, बेसल फलन का जनक फलन निम्नलिखित है :

$$J_0(x) + 2\, J_2(x) + 2\, J_4(x) + \ldots = 1.$$

(ख) हर्मिट बहुपदों का रोड्रिगेज़ सूत्र

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ व्युत्पन्न कीजिए ।

यह भी सिद्ध कीजिए कि

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$