No. of Printed Pages : 8

PHE-14(S)

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

00035

June, 2017

PHYSICS

PHE-14(S) : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : ***All*** *questions are compulsory, but internal choices are given. Symbols have their usual meanings. The marks for each question are indicated against it.*

1. Attempt any ***five*** parts : *5×2=10*

(i) Show that the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$ is both Hermitian and unitary.

(ii) Show that the velocity is a contravariant vector.

(iii) Determine whether the function

$g(z) = i\,(x^2 + y^2)$ is analytic or not.

(iv) Locate and name the singularities of the function

$$f(z) = \frac{2}{z^2} + \frac{3}{(z-i)^4}$$

(v) Determine the Laplace transform of the function te^{6t}.

(vi) Rodrigues formula for Hermite polynomials is $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]$.

Obtain $H_2(x)$.

(vii) Show that each element of an abelian group is a class by itself.

(viii) Determine the Fourier cosine transform of the function :

$$f(x) = \begin{cases} C & \text{for} \quad 0 < x < a \\ 0 & \text{for} \quad x > a \end{cases}$$

where C is a constant.

2. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(i) Diagonalise the following matrix A by a similarity transformation :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(ii) For the quadratic equation

$$2x^2 + 4xy - y^2 = 24$$

write down the matrix of coefficients. Recast it in new variables and identify the conic section it represents.

(iii) Determine the classes of the group $\{1, i, -1, -i\}$ with multiplication as the binary law of composition.

3. Attempt any ***two*** parts : *2×5=10*

(i) Using the method of residues show that :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

(ii) Evaluate the integral

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 1}\, dz \text{ where C is defined by } |z| = 2.$$

(iii) Determine the Laurent series for $z^2 e^{1/z}$ about $z = 0$.

4. (a) Obtain the Fourier sine transform of the function $f(x) = e^{-ax}$ for $0 < x < \infty$, $a > 0$. *5*

(b) Obtain the inverse Laplace transform of *5*

$$F(s) = \frac{s - 3}{s^2 + 4s + 13}.$$

OR

Use the method of Laplace transforms to solve the following initial value problem : *10*

$$y'' - 3y' + 2y = 0; \; y(0) = -1, \; y'(0) = 0$$

5. Using the following expression for Bessel function of first kind of order m :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

show that

$$\frac{d}{dx}\,[J_0(x)] = -\,J_1(x).$$ *10*

OR

Determine the first three terms in the expansion of the following function f(x) as a Legendre polynomial series of the form *10*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\, P_k(x),$$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

given that

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)\, P_m(x)\, dx = \frac{2}{2l+1}\, \delta_{lm}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

and $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$

पी.एच.ई.-14(S)

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2017

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14(S) : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं, लेकिन आन्तरिक विकल्प दिए गए हैं । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं । प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।*

1. कोई ***पाँच*** भाग कीजिए : *5×2=10*

(i) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$ हर्मिटी और ऐकिक दोनों है ।

(ii) सिद्ध कीजिए कि वेग प्रतिपरिवर्ती सदिश है ।

(iii) निर्धारित कीजिए कि फलन $g(z) = i(x^2 + y^2)$ विश्लेषिक है अथवा नहीं ।

(iv) निम्नलिखित फलन की विचित्रताओं का निर्धारण कीजिए और उनके नाम बताइए :

$$f(z) = \frac{2}{z^2} + \frac{3}{(z-i)^4}$$

(v) फलन te^{6t} का लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए ।

(vi) हर्मिट बहुपदों के लिए रोड्रिगेज़ सूत्र निम्नलिखित है :

$$H_n(x) = (-1)^n \, e^{x^2} \, \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]$$

$H_2(x)$ ज्ञात कीजिए ।

(vii) सिद्ध कीजिए कि एक आबेली समूह का प्रत्येक अवयव स्वयं में एक वर्ग है ।

(viii) निम्नलिखित फलन का फूरिये कोसाइन रूपांतर ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} C, & 0 < x < a \text{ के लिए} \\ 0, & x > a \text{ के लिए} \end{cases}$$

जहाँ C एक अचर है ।

2. कोई ***दो*** भाग कीजिए : *2×5=10*

(i) समरूपता रूपांतरण द्वारा निम्नलिखित आव्यूह A का विकर्णन कीजिए :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(ii) द्विघात समीकरण

$$2x^2 + 4xy - y^2 = 24$$

के गुणांकों का आव्यूह लिखिए । इसे नए चरों में प्रस्तुत कीजिए और बताइए कि यह किस शंकु परिच्छेद को निरूपित करता है ।

(iii) गुणन को द्वयी संयोजन नियम मानकर समूह $\{1, i, -1, -i\}$ के वर्ग ज्ञात कीजिए ।

3. कोई *दो* भाग कीजिए : *2×5=10*

(i) अवशिष्ट विधि का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

(ii) समाकल

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 1}\, dz$$

का मूल्यांकन कीजिए जहाँ C,

$|z| = 2$ द्वारा परिभाषित है ।

(iii) $z = 0$ के प्रति $z^2 e^{1/z}$ का लौरां श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिए ।

4. (क) फलन

$f(x) = e^{-ax},\ 0 < x < \infty,\ a > 0$

का फूरिये साइन रूपांतर प्राप्त कीजिए । *5*

(ख) निम्नलिखित फलन का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर प्राप्त कीजिए : *5*

$$F(s) = \frac{s - 3}{s^2 + 4s + 13}$$

अथवा

लाप्लास रूपांतरण विधि द्वारा निम्नलिखित आदिमान समस्या का हल प्राप्त कीजिए : *10*

$$y'' - 3y' + 2y = 0;\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$$

5. कोटि m वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलन को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

उपरोक्त का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{d}{dx}\,[J_0(x)] = -\,J_1(x).$$ 10

अथवा

फलन $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$

का प्रसार $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(x)$

लेजान्ड्रे बहुपदों की श्रेणी के रूप में करते हुए इस प्रसार के प्रथम तीन पद निर्धारित कीजिए । 10

दिया गया है कि

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)\, P_m(x)\, dx = \frac{2}{2l+1}\,\delta_{lm}$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

और $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$

500