

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

**June, 2017**

00353

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS**

**MTE-14(S) : MATHEMATICAL MODELLING**

*Time : 2 hours*

*Maximum Marks : 50*

*(Weightage : 70%)*

---

**Note : Attempt any five questions. Use of calculators is not allowed.**

---

---

1. (a) A particle falling from the top of a vertical tower descended  $x$  metres when another particle is let fall from a point  $y$  metres below the top. If they reach the ground together, show that the height of the tower is  $\frac{(x+y)^2}{4x}$  metres.

4

- (b) Find the equilibrium price in a perfectly competitive market with supply function  $S(p)$  and demand function  $D(p)$  given as

$$S(p) = (-p^2 + 9)/4,$$

$$D(p) = -2p + 6.$$

Using the static criterion of Walras, discuss whether these prices are stable. 3

- (c) The population of fish in a reservoir is affected by fishing and restocking. The proportionate birth rate is constant at 0.45 per year and the proportionate death rate is constant at 0.5 per year. The reservoir is restocked at a constant rate of 5000 fish per year and the fishermen are allowed to catch 4500 fish per year.

Solve the model and describe the long term behaviour of fish population, if the initial population of the fish was 5000. 3

2. (a) Consider the linear system

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y.$$

Find the critical point of the system and discuss its stability. 3

- (b) Consider the diffusion of oxygen through a membrane of thickness  $h$ , the two ends of which are maintained at concentrations  $C_1$  and  $C_2$  respectively. Assume that the cells are of very small dimensions and the membrane can be considered to be very thin. Give the governing equations and boundary conditions for the concentration of  $O_2$  within the membrane  $0 < x < h$ . Find an analytic solution of the problem formulated.

7

3. (a) Two firms A and B are involved in a competition. Each firm has three strategies, with pay-off table given below :

$$\begin{array}{c}
 \text{B} \\
 \text{A} \begin{bmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Find the saddle point and the value of the game.

3

- (b) In a bank, customers arrive according to Poisson distribution at an average rate of 6 customers per hour. The bank's waiting room can accommodate 15 customers maximum. The service time per customer is an exponential distribution with mean rate of 20 per hour. Find :

4

- (i) The effective arrival rate at the bank.

- (ii) The probability that an arriving customer has not to wait.
  - (iii) The probability that an arriving customer will find a vacant seat in the waiting room.
  - (iv) The expected waiting time till a customer is served by the bank.
- (c) A projectile is fired with a constant speed  $v$  at two different angles of projection  $\alpha$  and  $\beta$  such that it gives the same range. Show that

$$\operatorname{cosec} \alpha = \sec \beta.$$

3

4. (a) A disease being lethal, all removals are deaths and make no further contribution to the life of the community. New susceptible births arise solely from the susceptibles group itself. If  $\mu$  is the per capita birth rate, the governing equations of the model are

$$\frac{dx}{dt} = x(\mu - \beta y) \quad \text{and} \quad \frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y.$$

Show that the epidemic cycles for steady state consist of undamped simple harmonic waves of periodic time  $\frac{2\pi}{\sqrt{\gamma\mu}}$ .

5

(b) The demand function for a particular commodity is  $y = 15e^{-x/3}$ ,  $0 \leq x \leq 8$ , where  $y$  is the price per unit and  $x$  is the number of units demanded. Determine the price and the quantity for which the revenue is maximum. 5

5. (a) Discuss the static and dynamic stability for the following demand and supply functions : 3  
 $D_t = -0.6p_t + 120$  and  $S_t = -0.2p_t + 60$

(b) In the case of perfect positive correlation, i.e., when returns on two securities move together, show that the standard deviation of a two-security portfolio is equal to the weighted average of the standard deviations of its component securities. 4

(c) State the assumptions for formulation of a simple mathematical model for blood flow in the arteries for which Poiseuille's law is applicable. 3

6. (a) An investor has ₹ 50,000 to invest in stocks. He has two possible strategies : buy conservative blue chip stocks or buy highly speculative stocks. There are two states of nature : the market goes up or the market goes down. The following pay-off matrix shows the net amounts he will have under various circumstances.

		Market	
		Market up	Market down
Investor	Buy Blue Chip	₹ 24,000	₹ 16,000
	Buy Speculative	₹ 35,000	₹ 12,000

What should the investor do if he is

- (i) an optimist ?
- (ii) a pessimist ?
- (iii) What is the best strategy, if the probability of a market risk is 0.3 ?

4

- (b) Find the escape velocity of Jupiter for the following data : 2

$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}$ , radius =  $2.58 \times 10^7 \text{ m}$ ,  
mass =  $1.966 \times 10^{20} \text{ kg}$ .

- (c) The heat emission rate associated with a stack gas is 4800 kJ/s, the wind and stack gas speeds are respectively, 5 m/s and 15 m/s, and the inside stack diameter at the top is 2 m. Estimate the plume rise by means of

(i) Carson and Moses formula, and

(ii) Holland formula. 4

7. (a) The returns on the securities of two companies A and B are as follows :

Event (j)	Chance ( $p_{1j} = p_{2j}$ )	Returns	
		$R_{1j}$	$R_{2j}$
1	0.25	6	7
2	0.50	13	8
3	0.25	18	11

Find the expected returns of the portfolios  $P = (0.7, 0.3)$  and  $Q = (0.4, 0.6)$ . By comparing the returns of portfolios P and Q, what inference can you draw ? 5

- (b) A population is governed by the logistic equation  $\frac{dx}{dt} = 2\left(1 - \frac{x}{100}\right)x$ . Find the equilibrium solution of the population, if  $x = 80$  at  $t = 10$ . Find the population at  $t = 15$ .

5



स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2017

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-14(S) : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50  
(कुल का : 70%)

नोट : किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (क) एक कण को ऊर्ध्वाधर मीनार के शीर्ष से नीचे गिराया जाता है। जब वह  $x$  मीटर दूरी तय कर लेता है, तभी एक दूसरा कण शीर्ष से  $y$  मीटर नीचे के तल से गिराया जाता है। यदि दोनों कण भूमि पर एक साथ गिरते हैं, तब दिखाइए कि मीनार की ऊँचाई  $\frac{(x+y)^2}{4x}$  मीटर है।

4

(ख) पूर्ति फलन  $S(p) = (-p^2 + 9)/4$  और माँग फलन  $D(p) = -2p + 6$  वाले एक पूर्णतः प्रतियोगी बाज़ार की संतुलन कीमत ज्ञात कीजिए। वालरास का स्थैतिक निकष लागू करके बताइए कि कीमतें स्थायी हैं या नहीं।

3

(ग) मछली पकड़ने और पुनःस्थापन करने से एक जलाशय की मछलियों की संख्या पर प्रभाव पड़ता है। इनकी आनुपातिक जन्म दर 0.45 प्रति वर्ष पर अचर है और आनुपातिक मृत्यु दर 0.5 प्रति वर्ष पर अचर है। जलाशय का पुनःस्थापन 5000 मछली प्रति वर्ष की अचर दर से किया जाता है और मछुवारों को प्रति वर्ष 4500 मछली पकड़ने की अनुमति होती है।

निदर्श को हल कीजिए और यदि प्रारम्भिक मछली समष्टि 5000 थी, तब मछली समष्टि के दीर्घकालिक व्यवहार का वर्णन कीजिए।

3

2. (क) निम्नलिखित रैखिक निकाय लीजिए :

$$\frac{dx}{dt} = -2x + 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y$$

निकाय का क्रांतिक बिंदु ज्ञात कीजिए और इसके स्थायित्व की विवेचना कीजिए।

3

(ख) मोटाई  $h$  वाली एक झिल्ली से होकर जाते हुए ऑक्सीजन के विसरण पर विचार कीजिए, जिसमें दोनों सिरों को क्रमशः सांद्रता  $C_1$  और  $C_2$  पर अनुरक्षित रखा जाता है। मान लीजिए कि कोशिकाओं की विमाएँ अत्यधिक छोटी हैं और झिल्ली अत्यधिक पतली मानी जा सकती है।  $0 < x < h$  के लिए झिल्ली में  $O_2$  की सांद्रता के लिए सूत्रण करने वाला समीकरण और संबंधित सीमा प्रतिबंध दीजिए। सूत्रित समस्या का वैश्लेषिक हल ज्ञात कीजिए।

7

3. (क) दो फर्म A और B प्रतिस्पर्धा कर रही हैं। प्रत्येक फर्म के पास तीन युक्तियाँ हैं। भुगतान सारणी नीचे दी गई है :

$$A \begin{matrix} & \begin{matrix} B \\ \begin{bmatrix} -3 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

खेल का पल्याण बिंदु और मान ज्ञात कीजिए।

3

(ख) एक बैंक में उपभोक्ता प्वासों बंटन के अनुसार 6 उपभोक्ता प्रति घंटा की औसत दर से आते हैं। बैंक के प्रतीक्षा कक्ष में अधिक-से-अधिक 15 उपभोक्ता बैठ सकते हैं। सेवा काल 20 उपभोक्ता प्रति घंटा की औसत दर से चरघातांकी बंटन है। निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

4

(i) बैंक में उपभोक्ताओं के आने की प्रभावी आगमन दर।

- (ii) इस बात की प्रायिकता कि आने वाले उपभोक्ता को प्रतीक्षा न करनी पड़े ।
- (iii) इस बात की प्रायिकता कि आने वाले उपभोक्ता को प्रतीक्षा कक्ष में खाली सीट मिल जाए ।
- (iv) बैंक में उपभोक्ता को सेवा प्रदान किए जाने तक प्रत्याशित प्रतीक्षा काल ।
- (ग) दो अलग-अलग प्रक्षेप कोणों  $\alpha$  और  $\beta$  पर अचर गति  $v$  से एक प्रक्षेप्य इस प्रकार दागा जाता है कि वह समान परास देता है । दिखाइए कि

$$\operatorname{cosec} \alpha = \sec \beta.$$

3

4. (क) घातक रोग होने के कारण, निष्कासन किए गए सभी व्यक्ति वस्तुतः मृत व्यक्ति होते हैं और इनका समाज के प्रति आगे कोई योगदान नहीं रहा । अतः नए सुग्राह्य जन्म स्वयं केवल सुग्राह्य व्यक्ति-समूह से होते हैं । यदि  $\mu$  प्रति व्यक्ति जन्म दर हो, तो निदर्श के आधारभूत समीकरण निम्न होंगे :

$$\frac{dx}{dt} = x(\mu - \beta y) \text{ और } \frac{dy}{dt} = \beta xy - \gamma y.$$

दिखाइए कि स्थायी अवस्था के लिए महामारी चक्रों में आवर्त-काल  $\frac{2\pi}{\sqrt{\gamma\mu}}$  वाली अनवमंदित सरल आवर्ती तरंगें होती हैं ।

5

- (ख) किसी विशेष वस्तु का माँग फलन  $y = 15e^{-x/3}$ ,  
 $0 \leq x \leq 8$  है, जहाँ  $y$  प्रति इकाई कीमत है और  $x$   
इकाइयों की माँग संख्या है। वस्तु की कीमत और  
मात्रा ज्ञात कीजिए जिससे कि आय अधिकतम हो। 5

5. (क) निम्नलिखित माँग और आपूर्ति फलनों के लिए  
स्थैतिक और गतिक स्थायित्व की विवेचना कीजिए : 3

$$D_t = -0.6p_t + 120 \text{ और } S_t = -0.2p_t + 60$$

- (ख) संपूर्ण धनात्मक सहसंबंध की स्थिति में, अर्थात् जब दो  
प्रतिभूतियों के प्रतिफल एक साथ चलते हैं, तब  
दिखाइए कि दो-प्रतिभूति वाली निवेश-सूची का मानक  
विचलन इसकी घटक प्रतिभूतियों के मानक विचलनों  
के भारित औसत के बराबर होता है। 4

- (ग) धमनियों में रक्त प्रवाह का सरल गणितीय निदर्श सूचित  
करने के लिए कल्पनाओं का कथन कीजिए जिनके  
लिए प्वाज़य नियम लागू होता है। 3

6. (क) एक निवेशक के स्टॉक में ₹ 50,000 निवेश करने हैं । उसके पास दो संभावित युक्तियाँ हैं : या तो संरक्षी ब्लू चिप स्टॉक खरीदे या अति सट्टा स्टॉक खरीदे । प्रकृति की दो अवस्थाएँ हैं : या तो बाज़ार चढ़ जाता है या बाज़ार गिर जाता है । निम्नलिखित भुगतान आव्यूह में वे नेट धनराशियाँ दिखाई गई हैं जो कि विभिन्न परिस्थितियों में उसके पास रहती हैं ।

		बाज़ार	
		बाज़ार का बढ़ना	बाज़ार का गिरना
निवेशक	ब्लू चिप खरीदता है	₹ 24,000	₹ 16,000
	सट्टा खरीदता है	₹ 35,000	₹ 12,000

निवेशक को क्या करना चाहिए जबकि वह

- आशावादी हो ?
- निराशावादी हो ?
- यदि बाज़ार के खतरे की प्रायिकता 0-3 हो, तो सर्वोत्तम युक्ति क्या होगी ?

4

- (ख) निम्नलिखित आंकड़ों के लिए बृहस्पति का पलायन वेग ज्ञात कीजिए :

2

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg}, \text{ त्रिज्या} = 2.58 \times 10^7 \text{ m}, \\ \text{द्रव्यमान} = 1.966 \times 10^{20} \text{ kg}.$$

- (ग) स्टैक गैस से जुड़ी ऊष्मा उत्सर्जन दर 4800 kJ/s है, पवन चाल और स्टैक गैस चाल क्रमशः 5 m/s और 15 m/s हैं और ऊपरी सिरे पर स्टैक का अंतः व्यास 2 m है ।

(i) कार्सन और मोसेज सूत्र, तथा

(ii) होलैंड सूत्र

की सहायता से पिच्छक उत्थान आकलित कीजिए ।

4

7. (क) दो कम्पनियों A और B की प्रतिभूतियों पर प्रतिफल निम्नलिखित है :

घटना (j)	प्रायिकता ( $p_{1j} = p_{2j}$ )	प्रतिफल	
		$R_{1j}$	$R_{2j}$
1	0.25	6	7
2	0.50	13	8
3	0.25	18	11

निवेश-सूचियों  $P = (0.7, 0.3)$  और  $Q = (0.4, 0.6)$  के प्रत्याशित प्रतिफल ज्ञात कीजिए । निवेश-सूचियों P और Q के प्रतिफलों की तुलना करके आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं ?

5

(ख) एक समष्टि निम्नलिखित वृद्धिघात समीकरण  
$$\frac{dx}{dt} = 2\left(1 - \frac{x}{100}\right)x$$
 द्वारा सूत्रित है। समष्टि का संतुलन हल ज्ञात कीजिए, यदि  $t = 10$  पर  $x = 80$  है।  
 $t = 15$  पर समष्टि ज्ञात कीजिए।

5