

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME  
(BDP)**

**Term-End Examination**

00320

**June, 2017**

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS  
MTE-08(S) : DIFFERENTIAL EQUATIONS**

*Time : 2 hours*

*Maximum Marks : 50*

*(Weightage : 70%)*

---

*Note : Question no. 1 is compulsory. Answer any four questions out of the remaining questions no. 2 to 7. Use of calculators is not allowed.*

---

1. State whether the following statements are *True* or *False*. Justify your answer with the help of a short proof or a counter-example.  $5 \times 2 = 10$

(a)  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$  is a linear first order differential equation.

(b)  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|}$ ,  $y(0) = 0$  admits a unique solution.

(c)  $\frac{1}{x^2 y^2}$  is an integrating factor of the equation  $(x^2 y - 2xy^2) dx - (x^3 - 3x^2 y) dy = 0$ .

(d) The equation

$$(x^2z - y^3) dx + 3xy^2 dy + x^3 dz = 0$$

is integrable.

(e) The partial differential equation

$$(D^2 - 3DD' + 2D'^2 - D + 2D')z = 0$$

is irreducible.

2. (a) Solve :

3

$$y^2 \ln y = xyp + p^2, \text{ where } p = \frac{dy}{dx}$$

(b) Solve :

3

$$(D^2 + 4D + 3)y = e^{-3x}$$

(c) Find the integral curves of the equation

$$\frac{dx}{-1} = \frac{dy}{3y + 4z} = \frac{dz}{2y + 5z}$$

4

3. (a) Write an appropriate form of the trial solution for the differential equation

$$(D^4 + 2D^3 + 2D^2)y = 3e^x + 2xe^{-x} + e^{-x} \sin x.$$

2

(b) A 19.6 kg weight stretches a spring by 1.225 m. Find the equation of motion if the weight is released from the equilibrium point with an upward velocity of 3 m/sec, assuming that the damping constant for the system is 4 kg/m.

4

(c) Find the integral surface of the partial differential equation

$$(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy$$

which passes through the line  $x = 1, y = 0$ .

4

4. (a) Solve : 3

$$x^2 y'' - 2xy' + 2(1 + x^2)y = 0, x > 0$$

- (b) Using the variation of parameters method, obtain a particular integral of the non-homogeneous differential equation

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{1}{x^3} e^{-3x}, x > 0. \quad 4$$

- (c) Solve : 3

$$(1 + 4xy + 4x^2y) dx + (x^2 - x^3) dy = 0$$

5. (a) A body whose temperature is initially  $100^\circ\text{C}$  is allowed to cool in air whose temperature remains constant at  $20^\circ\text{C}$ . Find the temperature of the body as a function of time  $t$  if it is observed that the body cools to  $40^\circ\text{C}$  in 10 minutes. 3

- (b) Use Charpit's method to find the complete integral of the following partial differential equation : 4

$$xp + 3yq = 2(z - x^2q^2)$$

- (c) Solve the partial differential equation 3

$$(3D^2 - 2D'^2 + D - 1)z = 4e^{x+y} \cos(x + y).$$

6. (a) Solve the Laplace equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

in the rectangle with  $u(0, y) = 0$ ,  $u(a, y) = 0$ ,  $u(x, b) = 0$  and  $u(x, 0) = f(x)$ . 7

- (b) Find the orthogonal trajectories of the family of ellipses

$$x^2 + 2y^2 = C \quad (C \text{ is a parameter}). \quad 3$$

7. (a) Solve the following differential equation using the method of change of dependent variable : 4

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) xy = x^2 e^x$$

- (b) Using the method of separation of variables, solve

$$u_{xt} = e^{-t} \cos x$$

where  $u(x, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = 0$ . 3

- (c) Solve : 3

$$\sqrt{p} - \sqrt{q} + 3x = 0$$

---

स्नातक उपाधि कार्यक्रम  
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2017

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-08(S) : अवकल समीकरण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। शेष प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। संक्षिप्त उपपत्ति अथवा प्रत्युदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5×2=10

(क)  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$  एक रैखिक प्रथम कोटि अवकल समीकरण है।

(ख)  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|}$ ,  $y(0) = 0$  का एक अद्वितीय हल है।

(ग)  $\frac{1}{x^2 y^2}$  समीकरण

$(x^2 y - 2xy^2) dx - (x^3 - 3x^2 y) dy = 0$  का समाकल गुणक है।

(घ) समीकरण  $(x^2z - y^3) dx + 3xy^2 dy + x^3 dz = 0$   
समाकलनीय है ।

(ङ) आंशिक अवकल समीकरण

$$(D^2 - 3DD' + 2D'^2 - D + 2D')z = 0$$

असमानेय है ।

2. (क) हल कीजिए : 3

$$y^2 \ln y = xyp + p^2, \text{ जहाँ } p = \frac{dy}{dx}$$

(ख) हल कीजिए : 3

$$(D^2 + 4D + 3)y = e^{-3x}$$

(ग) समीकरण  $\frac{dx}{-1} = \frac{dy}{3y + 4z} = \frac{dz}{2y + 5z}$  के समाकल  
वक्र ज्ञात कीजिए । 4

3. (क) अवकल समीकरण

$$(D^4 + 2D^3 + 2D^2)y = 3e^x + 2xe^{-x} + e^{-x} \sin x$$

के लिए उपयुक्त जाँच हल लिखिए । 2

(ख) 19.6 कि.ग्रा. भार वाले एक द्रव्यमान से कमानी की लंबाई में 1.225 मी. की वृद्धि होती है । यदि भार को साम्य स्थिति से 3 मी./से. के ऊर्ध्वाधर वेग से छोड़ा जाए, तो गति समीकरण प्राप्त कीजिए । मान लीजिए कि तंत्र का अवमंदक अचर 4 कि.ग्रा./मी. है । 4

(ग) आंशिक अवकल समीकरण

$$(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy$$

का समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए जो रेखा  $x = 1, y = 0$   
से होकर जाता है । 4

4. (क) हल कीजिए : 3  

$$x^2 y'' - 2xy' + 2(1 + x^2)y = 0, x > 0$$
- (ख) प्राचल विचरण विधि द्वारा असमघात अवकल समीकरण  

$$y'' + 6y' + 9y = \frac{1}{x^3} e^{-3x}, x > 0$$
 का विशेष हल  
 प्राप्त कीजिए । 4
- (ग) हल कीजिए : 3  

$$(1 + 4xy + 4x^2y) dx + (x^2 - x^3) dy = 0$$
5. (क) एक पिण्ड जिसका आरंभ में तापमान  $100^\circ\text{C}$  है को  
 $20^\circ\text{C}$  के स्थिर तापमान वाली हवा में ठंडा होने दिया  
 जाता है । यदि यह पाया जाए कि पिण्ड 10 मिनट में  
 $40^\circ\text{C}$  तक ठंडा हो जाता है, तब समय  $t$  के फलन के  
 रूप में पिण्ड का तापमान ज्ञात कीजिए । 3
- (ख) चार्पिट विधि द्वारा आंशिक अवकल समीकरण  

$$xp + 3yq = 2(z - x^2q^2)$$
 का पूर्ण समाकल ज्ञात  
 कीजिए । 4
- (ग) आंशिक अवकल समीकरण  

$$(3D^2 - 2D'^2 + D - 1)z = 4e^{x+y} \cos(x + y)$$
  
 को हल कीजिए । 3
6. (क)  $u(0, y) = 0, u(a, y) = 0, u(x, b) = 0$  और  
 $u(x, 0) = f(x)$  वाले आयत में लाप्लास समीकरण  

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
 को हल कीजिए । 7
- (ख) दीर्घवृत्त कुल  $x^2 + 2y^2 = C$  ( $C$  एक प्राचल है) की  
 लंबकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए । 3

7. (क) परतंत्र चर की परिवर्तन विधि द्वारा निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए : 4

$$x \frac{d^2y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) xy = x^2 e^x$$

- (ख) चर-पृथक्करण विधि द्वारा  $u_{xt} = e^{-t} \cos x$  को हल कीजिए जहाँ  $u(x, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = 0$ . 3

- (ग) हल कीजिए : 3

$$\sqrt{p} - \sqrt{q} + 3x = 0$$

---