

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

00051

June, 2017

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-07(S) : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : Question no. 1 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from question no 2 to 7. Use of calculators is **not** allowed.

1. State whether the following statements are *true* or *false*. Justify your answers. 5×2=10

(a) The set of negative rational numbers does not have a supremum.

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

(c) The domain of $f(x, y) = \frac{2x}{x - 2y}$ is

$\mathbf{R}^2 - \{(0, 0), (2, 1)\}$.

(d) The region bounded by $y = x$, $y = -x$, $y = 2$ is of Type II.

(e) $f(x, y) = \frac{x^2 - xy}{y^2 - 4}$ is homogeneous on its domain.

2. (a) Find the second Taylor expansion for the function $f(x, y) = xy + \sin(x + y^2)$ about $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. 4

- (b) Show that the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is not continuous at $(0, 0)$. 3

- (c) If $f(x, y) = \sin\left(\frac{x^3 + y^3}{xy^2}\right)$, show that

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad 3$$

3. (a) Find the directional derivative of

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

at $(0, 0)$, in the direction of $\left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$. 5

- (b) If $f(x, y, z) = (x, y, z)$ and $g(u, v, w) = (u^2v, uv, zw)$ and $F = f \circ g$, verify that $J_F(1, 1, 1) = J_f(1, 1, 3) \cdot J_g(1, 1, 1)$. 5

4. (a) Locate and classify the stationary points of $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$. 5

(b) Describe the level surfaces of the following : 3

(i) $f(x, y, z) = x + y + z$

(ii) $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$

(c) Show that the following integral is independent of path : 2

$$\int_{(0,1)}^{(8,10)} (y^2 + 2xy) dx + (x^2 + 2xy) dy$$

5. (a) Find $f_{xy}(0, 0)$, if $f(x, y) = \begin{cases} xy^2, & y > 0 \\ -xy^2, & y \leq 0 \end{cases}$

Also find $f_{yx}(0, 0)$. Are the mixed partial derivatives equal ? 5

(b) Evaluate $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} dy dx$ by reversing

the order of integration. 5

6. (a) State Green's theorem and use it to evaluate

$$\int_C (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy, \text{ where } C \text{ is}$$

the boundary of the triangle with vertices (0, 0), (3, 0) and (3, 2), oriented anticlockwise. 5

(b) Evaluate the following limits : 5

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

7. (a) Using Inverse Function Theorem, verify that the following transformations are invertible : 5

(i) $w = 2x - 3y, \quad z = x + 3y$

(ii) $w = x + 5y, \quad z = 3x$

(b) Find the volume of the solid region between two concentric spheres of radii 2 and 5 units. 5

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2017

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-07(S) : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। 5×2=10
 - (क) ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के समुच्चय का उच्चक नहीं होता है।
 - (ख) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.
 - (ग) $f(x, y) = \frac{2x}{x-2y}$ का प्रांत $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0), (2, 1)\}$ है।
 - (घ) $y = x$, $y = -x$, $y = 2$ से परिबद्ध प्रदेश, प्रकार II का होता है।
 - (ङ) $f(x, y) = \frac{x^2 - xy}{y^2 - 4}$ अपने प्रांत पर समघात है।

2. (क) $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ के प्रति फलन $f(x, y) = xy + \sin(x + y^2)$ के लिए द्वितीय टेलर प्रसार ज्ञात कीजिए । 4

(ख) दिखाइए कि फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(0, 0)$ पर संतत नहीं है । 3

- (ग) यदि $f(x, y) = \sin\left(\frac{x^3 + y^3}{xy^2}\right)$ है, तब दिखाइए कि

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad 3$$

3. (क) $\left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right)$ की दिशा में, $(0, 0)$ पर

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

का दिक् अवकलज ज्ञात कीजिए । 5

(ख) यदि $f(x, y, z) = (x, y, z)$ और

$g(u, v, w) = (u^2v, uv, zw)$ और $F = fog$, तब सत्यापित कीजिए कि

$$J_F(1, 1, 1) = J_f(1, 1, 3) \cdot J_g(1, 1, 1). \quad 5$$

4. (क) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ के स्तब्ध बिन्दु निर्धारित करके उनका वर्गीकरण कीजिए । 5
- (ख) निम्नलिखित के स्तर-पृष्ठों का वर्णन कीजिए : 3
- (i) $f(x, y, z) = x + y + z$
- (ii) $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2$
- (ग) दिखाइए कि निम्नलिखित समाकल पथ-स्वातंत्र्य है : 2

$$\int_{(0,1)}^{(8,10)} (y^2 + 2xy) dx + (x^2 + 2xy) dy$$

5. (क) यदि $f(x, y) = \begin{cases} xy^2, & y > 0 \\ -xy^2, & y \leq 0 \end{cases}$, तब $f_{xy}(0, 0)$ ज्ञात कीजिए । $f_{yx}(0, 0)$ भी ज्ञात कीजिए । क्या मिश्रित आंशिक अवकलज बराबर हैं ? 5

- (ख) समाकलन का क्रम पलट कर

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} dy dx$$

का मूल्यांकन कीजिए । 5

6. (क) ग्रीन प्रमेय का कथन दीजिए और इस प्रमेय का प्रयोग करके $\int_C (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ C वामावर्त अभिविन्यास $(0, 0)$, $(3, 0)$ और $(3, 2)$ शीर्षों वाले त्रिभुज की परिसीमा है । 5

(ख) निम्नलिखित सीमाओं का मूल्यांकन कीजिए : 5

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

7. (क) प्रतिलोम फलन प्रमेय द्वारा सत्यापित कीजिए कि निम्नलिखित रूपांतरण व्युत्क्रमणीय हैं : 5

(i) $w = 2x - 3y, \quad z = x + 3y$

(ii) $w = x + 5y, \quad z = 3x$

(ख) त्रिज्या 2 और 5 एककों वाले दो संकेन्द्री गोलों के बीच के ठोस प्रदेश का आयतन ज्ञात कीजिए । 5

—————