

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)****00458 Term-End Examination
June, 2017****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-01(S) : CALCULUS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : Question no. 1 is compulsory. Solve any four questions from the remaining questions.

1. Which of the following statements are *true* or *false* ? Justify your answers. $5 \times 2 = 10$
- (a) The range of the function $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ defined by $f(x) = [x]$ is $\{-1, 0, 1\}$, where $[x]$ is the greatest integer $\leq x$.
- (b) The graph of the function $f(x) = x - |x|$ lies in the third quadrant.
- (c)
$$\frac{d}{dx} \left[\int_x^{e^x} \ln(t) dt \right] = x e^x.$$
- (d)
$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3}, \quad x \geq 0.$$

(e) $x = \frac{1}{3}$ is the only asymptote of the curve

$$x = \frac{y^2 - 3y + 2}{3y^2 + y + 1}$$

2. (a) If $y = \exp(m \tan^{-1} x)$, find the value of $(1 + x^2) y_{n+1} + (2nx - m) y_n + n(n-1) y_{n-1}$. 3

(b) Using Maclaurin's series expansion for $\cos 3x$, find out the value(s) of k for which the function f , given by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ k(1 + \sin^2 x), & x = 0 \end{cases}$$

is continuous at $x = 0$. 3

(c) Find the entire length of the cardioid $r = a(1 - \cos \theta)$. 4

3. (a) Evaluate : 3

$$\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$$

(b) An object starting from rest moves along a straight line. Its velocity $v(t)$ (in m/sec) recorded at time t is given in the table below :

t	1	2	3	4	5	6
$v(t)$	3	4	6	5	5	3

Approximate the total distance travelled by the object by using Simpson's Rule. 3

- (c) Given a function $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$, $L = 3$, $x_0 = 0$ and $\Sigma = 0.1$, find $\delta > 0$ such that $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \Sigma$. 4

4. Trace the curve $y = x + \frac{1}{x}$, stating all the properties you use for doing so. 10

5. (a) Differentiate $\sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$ with respect to $\cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$. 3

- (b) A tour operator charges ₹ 136 per passenger for 100 passengers, with a discount of ₹ 4 for each group of 10 passengers in excess of 100. Determine the number of passengers that will maximize the amount of money the tour operator receives. 4

- (c) Evaluate : 3

$$\int \frac{x^2 - 3}{x^4 + 2x^2 + 9} dx$$

6. (a) If $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx dx$, ($n \geq 1$), find the value of $2I_{n+1} - I_n$. Hence obtain the value of I_2 . 5

- (b) An arc of the cycloid $x = a(t + \sin t)$,
 $y = a(1 + \cos t)$ revolves about the base. Find
the volume of the solid generated by it. 5

7. (a) Find the area of the smallest portion enclosed
by the curves $x^2 + y^2 = 9$ and $y^2 = 8x$. 4

- (b) Evaluate : 4

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x} dx$$

- (c) Prove that

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

for all real values of x and y . 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2017

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-01(S) : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। शेष प्रश्नों में से किन्हीं चार प्रश्नों को हल कीजिए।

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं या असत्य ?
अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। 5×2=10

(क) $f(x) = [x]$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ का गोचर $[-1, 0, 1]$ है, जहाँ $[x]$, अधिकतम पूर्णांक $\leq x$ को दर्शाता है।

(ख) फलन $f(x) = x - |x|$ का ग्राफ तृतीय चतुर्थांश में स्थित होता है।

(ग)
$$\frac{d}{dx} \left[\int_x^{e^x} \ln(t) dt \right] = x e^x.$$

(घ)
$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3}, \quad x \geq 0.$$

(ड) वक्र $x = \frac{y^2 - 3y + 2}{3y^2 + y + 1}$ की अनंतस्पर्शी केवल $x = \frac{1}{3}$ है ।

2. (क) यदि $y = \exp(m \tan^{-1} x)$ है, तो $(1 + x^2) y_{n+1} + (2nx - m) y_n + n(n-1) y_{n-1}$ का मान ज्ञात कीजिए । 3

(ख) $\cos 3x$ के लिए मैक्लॉरिन श्रेणी प्रसरण का प्रयोग करके, k के उन मान(नों) को ज्ञात कीजिए जिनके लिए दिया गया फलन f

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ k(1 + \sin^2 x), & x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर संतत है । 3

(ग) हृदयाभ $r = a(1 - \cos \theta)$ की पूरी लंबाई ज्ञात कीजिए । 4

3. (क) मूल्यांकन कीजिए : 3

$$\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$$

(ख) एक वस्तु विरामावस्था से प्रारंभ करके एक सरल रेखा में चलती है । इसका वेग $v(t)$ (मी./से. में) समय t पर निम्न सारणी में नीचे दिया गया है :

t	1	2	3	4	5	6
$v(t)$	3	4	6	5	5	3

सिम्प्सन नियम का प्रयोग करके वस्तु द्वारा तय की गई कुल दूरी का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए । 3

(ग) $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ द्वारा परिभाषित फलन f , $L = 3$, $x_0 = 0$ और $\Sigma = 0.1$ दिए गए हैं। $\delta > 0$ के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \Sigma. \quad 4$$

4. वक्र $y = x + \frac{1}{x}$ का अनुरेखण कीजिए। उन सभी गुणधर्मों को स्पष्ट रूप से बताइए, जिनका आपने अनुरेखण करने में प्रयोग किया है। 10

5. (क) $\sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$ का $\cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए। 3

(ख) एक दूर ऑपरेटर 100 यात्रियों के लिए प्रति यात्री ₹ 136 शुल्क लेता है। 100 से अधिक यात्री होने पर वह 10 यात्रियों के प्रत्येक समूह के लिए ₹ 4 की छूट देता है। यात्रियों की वह संख्या ज्ञात कीजिए जिससे कि दूर ऑपरेटर को मिलने वाले पैसे की राशि अधिकतम हो सके। 4

(ग) मूल्यांकन कीजिए : 3

$$\int \frac{x^2 - 3}{x^4 + 2x^2 + 9} dx$$

6. (क) यदि $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx dx$, ($n \geq 1$) है, तो

$2I_{n+1} - I_n$ का मान ज्ञात कीजिए। इस प्रकार I_2 का मान प्राप्त कीजिए। 5

(ख) चक्रज $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 + \cos t)$ का एक चाप आधार के प्रति घूर्णित होता है। इसके द्वारा जनित घनाकृति का आयतन ज्ञात कीजिए। 5

7. (क) वक्रों $x^2 + y^2 = 9$ और $y^2 = 8x$ से घिरे सबसे छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 4

(ख) मूल्यांकन कीजिए : 4

$$\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x} dx$$

(ग) x और y के सभी वास्तविक मानों के लिए सिद्ध कीजिए कि $|x + y| \leq |x| + |y|$. 2