No. of Printed Pages : 12

MTE-14

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

01577

Term-End Examination

June, 2016

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50
(Weightage : 70%)

Note : *Attempt any **five** questions. All questions carry equal marks. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. (a) Find the greatest distance that a stone can be thrown inside a horizontal tunnel, 10 m high, with a velocity of projection 80 m/sec. Also, find the corresponding time of flight. *5*

(b) Consider arterial blood viscosity $\mu = 0{\cdot}025$ poise. If the length of the artery is $1{\cdot}5$ cm, radius 8×10^{-3} cm and $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dynes/cm^2, then find the

(i) maximum peak velocity of blood, and

(ii) shear stress at the wall. *5*

2\. (a) Consider the case of a disease which is lethal to all those contracting it, i.e., all remarks are in fact deaths and make no contribution to the life of the community. New susceptible births arise solely from the susceptible group itself. Formulate this model and examine the steady state. What type of waves do the epidemic cycles consist of ? *4*

(b) Discuss the following market which is characterized by lagged supply response : *3*

$$D_t = 30 - 9p_t$$
$$S_t = 3 + 12p_{t-1}$$

(c) Find the output which yields maximum profit when the cost function is $0{\cdot}3q^3 - 0{\cdot}8q^2 + 12q + 5$, assuming the price of q is ₹ 30 per unit. *3*

3\. (a) A ball is thrown vertically upwards with a velocity of 30 m/sec. Find

(i) How high will it go ?

(ii) What time will it take to reach the highest point ?

(iii) What will its velocity be at the end of 2 seconds ?

(iv) With what velocity will it come back to the ground ? *4*

(b) Let x(t) measure in kilograms the biomass of the halibut population at time t in a logistic model. The parameters, intrinsic growth rate r_1 and carrying capacity K, are estimated to have the values $r_1 = 0{\cdot}7$/year and $K = 70{\cdot}5 \times 10^6$ kg and initial biomass as $x_0 = 0{\cdot}30$ K. Find the biomass two years later. Also find the time τ for which $x(\tau) = 0{\cdot}60$ K. 4

(c) Write four factors that are used to compare two portfolios. 2

4. (a) A solid tumour usually grows at a declining rate because its interior has no access to oxygen and other necessary substances that circulation supplies. This situation has been modelled by its Gompertz growth law

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N, \text{ where } \frac{d\gamma}{dt} = -\alpha\gamma,$$

where γ is the effective growth rate, which will decrease exponentially by our assumption. Show that this can be equivalently expressed as

$$\frac{dN}{dt} = \gamma_0 \, e^{-\alpha t}, \; N = (-\alpha \, ln \, N) \, N.$$

4

(b) The volume rate of flow Q of a fluid through a tube is dependent upon the pressure drop per unit length, the diameter d and viscosity μ. Using dimensional analysis, show that $Q = \text{Constant} \times \frac{d^4}{\mu} \times \frac{\Delta p}{l}$, where Δp is the change in pressure and l is the length of the tube. 3

(c) The heat-emission rate associated with a stack gas is 5000 kJ/s and wind speed is 5 m/sec. Estimate the plume rise by means of Concave formula. *3*

5. (a) The mean arrival rate to a service centre is 3 per hour. The mean service time is found to be 10 minutes for service. Assuming Poisson arrival and exponential service time, find

(i) the utilisation factor for this service facility,

(ii) the probability of two units in the system,

(iii) the expected number of units in the system, and

(iv) the expected time in hours that a customer has to spend in the system. *5*

(b) The growth of a population is proportional to the population and restricted by availability of food, space, etc., which can be modelled as proportional to the square of the population itself.

(i) Model this process.

(ii) Solve the resulting equation.

(iii) Show that the population approaches a limiting value. Give the interpretation of this value in the given context. *5*

6. (a) Consider the following system of differential equations representing a prey and predator population model :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

(i) Identify all the real critical points of the system of equations given above.

(ii) Discuss the type and stability of these critical points. *7*

(b) Two players, A and B, are involved in a game. Each player has three different strategies. The pay-off table is given below :

$$A \overset{B}{\begin{bmatrix} 5 & -7 & -17 \\ 4 & 6 & -15 \\ 9 & 10 & -13 \end{bmatrix}}$$

Find the saddle point and value of the game. *3*

7. (a) The pressure difference across the ends of a horizontally placed capillary tube is P. The rate of liquid flowing through the capillary tube is Q c.c. per second. If the radius of the tube is doubled and pressure difference is halved, obtain the change in amount of the liquid flowing per second in the tube. *3*

(b) Let the returns on the securities of two companies x and y be as given below :

Event (j)	Chance ($p_{1j} = p_{2j}$)	Return	
		R_{1j}	R_{2j}
1	$\frac{1}{4}$	6	7
2	$\frac{1}{2}$	13	8
3	$\frac{1}{4}$	18	11

Find the expected return of the portfolios P = (0·7, 0·3) and Q = (0·4, 0·6). What inference can you draw by comparing the returns of portfolios P and Q ? 5

(c) Write two limitations of a Gaussian plume model in its application to real-world problems. 2

एम.टी.ई.-14

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का : 70%)

नोट : *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं । कैल्कुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. (क) 10 m ऊँची एक क्षैतिज सुरंग के अंदर प्रक्षेप्य वेग 80 m/sec से फेंके जाने पर एक पत्थर द्वारा तय की गई अधिकतम दूरी ज्ञात कीजिए । उड़ान में लगा समय भी ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) धमनी रक्त श्यानता $\mu = 0{\cdot}025$ पॉयज़ है । यदि धमनी की लंबाई 1·5 cm, त्रिज्या 8×10^{-3} cm तथा $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dynes/cm^2 हो, तो

(i) रक्त का अधिकतम शिखर वेग, तथा

(ii) दीवार पर अपरूपण प्रतिबल ज्ञात कीजिए । *5*

2. (क) उस रोग को लीजिए जो अपने संपर्क में आने वाले सभी व्यक्तियों के लिए घातक होता है, अर्थात् निष्कासन किए गए सभी व्यक्ति वस्तुतः मृत व्यक्ति होते हैं और इनका समाज के प्रति आगे कोई योगदान नहीं रह जाता । नए सुग्राह्य जन्म केवल सुग्राह्य व्यक्ति समूह से होते हैं । इस निदर्श का सूत्रण कीजिए और अपरिवर्ती अवस्था की जाँच कीजिए । महामारी चक्रों में किस प्रकार की तरंगें होती हैं ? 4

(ख) निम्नलिखित बाज़ार की, जो पश्चायित पूर्ति अनुक्रिया से अभिलक्षणित होती है, चर्चा कीजिए : 3

$$D_t = 30 - 9p_t$$

$$S_t = 3 + 12p_{t-1}$$

(ग) यदि लागत फलन $0{\cdot}3q^3 - 0{\cdot}8q^2 + 12q + 5$ हो और मान लीजिए q की कीमत प्रति इकाई ₹ 30 है, तो वह निर्गत ज्ञात कीजिए जिससे अधिकतम लाभ प्राप्त होता हो । 3

3. (क) एक गेंद को 30 m/sec के वेग से ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर फेंका जाता है । ज्ञात कीजिए कि

(i) गेंद कितनी ऊँचाई तक जाएगी ।

(ii) गेंद को अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचने में कितना समय लगेगा ।

(iii) गेंद का वेग 2 सेकण्ड के बाद क्या होगा ।

(iv) जमीन पर वापस पहुँचने पर गेंद का वेग क्या होगा । 4

(ख) एक वृद्धिघात निदर्श में, मान लीजिए किलोग्राम में मापा गया $x(t)$ समय t पर हैलिबट समष्टि की जैवमात्रा है । प्राचलों नैज संवृद्धि दर r_1 और वाहक क्षमता K के आकलित मान $r_1 = 0{\cdot}7$ प्रति वर्ष और $K = 70{\cdot}5 \times 10^6$ kg हैं और प्रारम्भिक जैवमात्रा $x_0 = 0{\cdot}30$ K है । दो वर्ष बाद की जैवमात्रा ज्ञात कीजिए और वह समय τ भी ज्ञात कीजिए जिस पर $x(\tau) = 0{\cdot}60$ K. *4*

(ग) ऐसे चार कारक लिखिए जिनका प्रयोग दो निवेश-सूचियों (पोर्टफोलियों) की तुलना करने में किया जाता है । *2*

4. (क) प्राय: ठोस ट्यूमर में वृद्धि ह्रासी दर से होती है, क्योंकि इसके आंतरिक भाग में ऑक्सीजन तथा अन्य आवश्यक पदार्थ, जिससे रक्त का परिसंचरण होता है, नहीं पहुँच पाते । इस स्थिति को निम्नलिखित गोम्पर्ट्ज़ संवृद्धि नियम से निदर्शित किया गया है :

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N, \text{ जहाँ } \frac{d\gamma}{dt} = -\alpha\gamma,$$

जहाँ γ, प्रभावी संवृद्धि दर है, जिसमें की गई कल्पना के अनुसार चरघातांकीय रूप से कमी आएगी । दिखाइए कि इसे व्यक्त करने की तुल्य विधि यह है

$$\frac{dN}{dt} = \gamma_0\, e^{-\alpha t}, \; N = (-\alpha\, ln\, N)\, N.$$ *4*

(ख) नली से तरल के प्रवाह की आयतन दर Q, दाब गिरावट (ह्रास) प्रति इकाई लंबाई, नली के व्यास d और श्यानता μ पर आधारित है । विमीय विश्लेषण द्वारा दिखाइए कि

$Q = \text{अचर} \times \frac{d^4}{\mu} \times \frac{\Delta p}{l}$, जहाँ Δp दाब में परिवर्तन है और l नली की लंबाई है । *3*

(ग) स्टैक गैस से सम्बन्धित ऊष्मा-उत्सर्जन दर 5000 kJ/s है तथा पवन चाल 5 m/sec है । कॉन्केव सूत्र से पिच्छक उत्थान आकलित कीजिए । *3*

5. (क) किसी सेवा केन्द्र पर माध्य आगमन दर 3 प्रति घंटा है । माध्य सेवा समय 10 मिनट प्रति सेवा है । प्वासों आगमन और चरघातांकीय सेवा समय की कल्पना करते हुए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) इस सेवा सुविधा के लिए उपयोग गुणक,

(ii) प्रणाली में दो इकाइयों की प्रायिकता,

(iii) प्रणाली में इकाइयों की प्रत्याशित संख्या, तथा

(iv) प्रणाली में एक ग्राहक द्वारा घंटों में व्यतीत किया जाने वाला प्रत्याशित समय । *5*

(ख) जनसंख्या में वृद्धि जनसंख्या के समानुपाती है और भोजन, जगह आदि की उपलब्धता के कारण इसमें लगने वाले प्रतिबंध का निदर्शन जनसंख्या के वर्ग के समानुपाती है ।

(i) इस प्रक्रिया का निदर्शन कीजिए ।

(ii) प्राप्त समीकरण को हल कीजिए ।

(iii) दिखाइए कि जनसंख्या एक सीमांत मान की ओर अभिगम होती है । दिए गए संदर्भ में इस मान की व्याख्या कीजिए । *5*

6. (क) निम्नलिखित अवकल समीकरण निकाय लीजिए जो शिकार और परभक्षी के जनसंख्या निदर्श को निरूपित करता है :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

(i) ऊपर दिए गए समीकरण निकाय के सभी वास्तविक क्रांतिक बिन्दुओं को पहचानिए ।

(ii) इन क्रांतिक बिन्दुओं के प्रकार और स्थायित्व पर चर्चा कीजिए । 7

(ख) दो खिलाड़ी A और B एक खेल खेल रहे हैं । प्रत्येक खिलाड़ी के पास तीन अलग-अलग युक्तियाँ हैं । भुगतान सारणी नीचे दी गई है :

$$\begin{array}{cc} & B \\ A & \begin{bmatrix} 5 & -7 & -17 \\ 4 & 6 & -15 \\ 9 & 10 & -13 \end{bmatrix} \end{array}$$

खेल का पल्याण बिन्दु और मान ज्ञात कीजिए । 3

7. (क) क्षैतिज स्थिति में रखी हुई केशिका नली के सिरों पर दाबांतर P है । केशिका नली के द्वारा प्रवाहित होने वाले द्रव की दर Q c.c. प्रति सेकण्ड है । यदि नली की त्रिज्या को दुगुना और दाबांतर को आधा कर दिया जाए, तो नली में प्रति सेकण्ड प्रवाहित होने वाले द्रव की मात्रा में क्या परिवर्तन प्राप्त होगा ? 3

(ख) मान लीजिए दो कम्पनियों x और y की प्रतिभूतियों के प्रतिफल नीचे दिए गए हैं :

घटना (j)	प्रायिकता ($p_{1j} = p_{2j}$)	प्रतिफल	
		R_{1j}	R_{2j}
1	$\frac{1}{4}$	6	7
2	$\frac{1}{2}$	13	8
3	$\frac{1}{4}$	18	11

निवेश-सूची P = (0·7, 0·3) और Q = (0·4, 0·6) के प्रत्याशित प्रतिफल ज्ञात कीजिए । निवेश-सूची P और Q के प्रतिफलों की तुलना करने पर आप क्या अनुमिति निकाल सकते हैं ? *5*

(ग) वास्तविक-जीवन समस्याओं में गाउसीय पिच्छक निदर्श के अनुप्रयोग में आने वाली दो सीमाएँ लिखिए । *2*