

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

Term-End Examination

01885

June, 2016

**ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS**

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : Question no. 7 is **compulsory**. Answer any **four** questions from questions no. 1 to 6. Use of calculators is **not** allowed.

1. (a) Let X be a continuous random variable with p.d.f.

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x \leq 1 \\ a, & 1 \leq x \leq 2 \\ -ax + 3a, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Determine the constant 'a' and compute $P(X \leq 1.5)$. Also, compute mean and variance of X.

5

- (b) The joint probability distribution of two random variables X and Y is given below :

Y X	1	2	3	4
1	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$
3	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$

- (i) Find the marginal distributions of X and Y.
- (ii) Find the conditional distribution of X given the value of Y = 1 and that of Y given the value of X = 2.

5

2. (a) Find the maximum likelihood estimator for the parameter λ of the Poisson distribution on the basis of a sample of size n. Also, find its variance.

5

- (b) Suppose that two-dimensional continuous random variable (X, Y) has joint p.d.f. given by

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x^2y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

(i) Verify that $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = 1$.

(ii) Find $P(0 < X < \frac{3}{4}, \frac{1}{3} < Y < 2)$,

$P(X + Y < 1)$, $P(X > Y)$ and $P(X < 1 | Y < 2)$.

5

3. (a) Let X be a single observation from the p.d.f.

$$f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}, 0 \leq x < \infty.$$

If $X \geq 1$ is the critical region for testing

$H_0 : \theta = 2$ against the alternative hypothesis

$H_1 : \theta = 1$, obtain the values of type I and

type II errors.

5

(b) The probability that a student passes a Physics test is $\frac{2}{3}$ and the probability that

the student passes both a Physics test and an English test is $\frac{14}{45}$. The probability that

the student passes at least one test is $\frac{4}{5}$.

What is the probability that the student passes the English test?

2

- (c) Draw the cumulative frequency curves for the following distribution :

Marks	No. of Students
0 - 10	4
10 - 20	8
20 - 30	11
30 - 40	15
40 - 50	12
50 - 60	6
60 - 70	3

From the graph, obtain the value of median. 3

4. (a) X_1, X_2 and X_3 is a random sample of size 3 from a population with mean μ and variance σ^2 . T_1, T_2 and T_3 are the estimators to estimate μ , and are given by $T_1 = X_1 + X_2 - X_3$; $T_2 = 2X_1 + 3X_3 - 4X_2$ and $T_3 = \frac{1}{3} (\lambda X_1 + X_2 + X_3)$.

- (i) Are T_1 and T_2 unbiased ? Give reason.
(ii) Find the value of λ such that T_3 is unbiased.
(iii) Which is the best estimator ? State giving reasons. 5

- (b) A group of 250 items with mean 15.6 and standard deviation $\sqrt{13.44}$ has been divided into two groups. The first has 100 items with mean 15 and standard deviation 3. Find the standard deviation of the second group. 5

5. (a) A single observation was taken from a population with p.d.f.

$$f(x, \theta) = \frac{2}{\theta^2} (\theta - x), \quad 0 \leq x \leq \theta.$$

Obtain 100 (1 - α)% confidence interval for θ . 5

- (b) For 10 observations on price (X) and supply (Y) the following data were obtained (in appropriate units) :

$$\sum X = 130, \sum Y = 200, \sum X^2 = 2288, \sum Y^2 = 5506$$

and $\sum XY = 3467$.

Obtain the line of regression of Y on X and estimate the supply when price is 16 units. 5

6. (a) In a large population, the proportion having a certain disease is 0.01. Find the probability that in a random group of 200 people at least four will have the disease. 4

- (b) Let X be a random variable with the following probability distribution :

x :	- 3	6	9
P(X = x) :	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Find E(X), V(X) and E(2X + 1)². 4

- (c) Let X be a random variable with $E(X) = 3$ and $E(X^2) = 13$. Find the lower bound for $P[-2 < X < 8]$.

2

7. Which of the following statements are *true* and which are *false*? Give a short proof or a counter-example in support of your answers.

10

- (a) The algebraic sum of deviations of a set of n values from their arithmetic mean is n .

- (b) Mutually exclusive events are independent.

- (c) The mean of the binomial distribution $\binom{10}{x} \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{3}{5}\right)^{10-x}$; $x = 0, 1, 2, \dots, 10$ is

14 and the variance is 3.

- (d) The moment generating function of a chi-square variate with n degrees of freedom is $(1 - 2t)^{-n/2}$.

- (e) If X is $N(0, 1)$, then $Y = X^2$ has gamma distribution with parameters $\alpha = \frac{1}{2}$ and

$$\lambda = \frac{1}{2}.$$

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 7 करना अनिवार्य है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।

1. (क) मान लीजिए X निम्नलिखित प्रा.घ.फ. वाला संतत यादृच्छिक चर है :

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x \leq 1 \\ a, & 1 \leq x \leq 2 \\ -ax + 3a, & 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

अचर 'a' ज्ञात कीजिए और $P(X \leq 1.5)$ परिकलित कीजिए । X का माध्य और प्रसरण भी परिकलित कीजिए ।

5

(ख) दो यादृच्छिक चरों X और Y का संयुक्त प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है :

Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$
3	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$

(i) X और Y के उपांत बंटन ज्ञात कीजिए ।

(ii) यदि Y = 1 का मान दिया हुआ हो, तो X का सप्रतिबंध बंटन और यदि X = 2 का मान दिया हुआ हो, तो Y का सप्रतिबंध बंटन ज्ञात कीजिए । 5

2. (क) प्रतिदर्श आमाप n के आधार पर प्वासों बंटन के प्राचल λ का अधिकतम संभावित आकलक ज्ञात कीजिए । इसका प्रसरण भी ज्ञात कीजिए । 5

(ख) मान लीजिए कि द्वि-विमीय संतत यादृच्छिक चर (X, Y) का संयुक्त प्रा.घ.फ. निम्नलिखित है :

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x^2y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

(i) सत्यापित कीजिए कि $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = 1$.

(ii) $P(0 < X < \frac{3}{4}, \frac{1}{3} < Y < 2)$, $P(X + Y < 1)$,
 $P(X > Y)$ और $P(X < 1 | Y < 2)$ ज्ञात
कीजिए ।

5

3. (क) मान लीजिए X निम्नलिखित प्रा.घ.फ.

$$f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}, 0 \leq x < \infty$$

से लिया गया एक प्रेक्षण है ।

यदि वैकल्पिक परिकल्पना $H_1 : \theta = 1$ के विरुद्ध
 $H_0 : \theta = 2$ के परीक्षण के लिए क्रांतिक प्रदेश $X \geq 1$
है, तो प्रकार I और प्रकार II त्रुटियों के मान प्राप्त
कीजिए ।

5

(ख) एक विद्यार्थी के भौतिक विज्ञान परीक्षण पास करने की
प्रायिकता $\frac{2}{3}$ है और विद्यार्थी के भौतिक विज्ञान और
अंग्रेज़ी दोनों के परीक्षण पास करने की प्रायिकता $\frac{14}{45}$
है । विद्यार्थी के कम-से-कम एक परीक्षण पास करने की
प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है । विद्यार्थी के अंग्रेज़ी परीक्षण पास करने
की प्रायिकता क्या है ?

2

- (ग) निम्नलिखित बंटन के लिए संचयी बारंबारता वक्रों को अनुरेखित कीजिए :

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0 - 10	4
10 - 20	8
20 - 30	11
30 - 40	15
40 - 50	12
50 - 60	6
60 - 70	3

ग्राफ़ से माध्यिका का मान प्राप्त कीजिए ।

3

4. (क) माध्य μ और प्रसरण σ^2 वाली समष्टि से आमाप 3 वाला एक यादृच्छिक प्रतिदर्श X_1, X_2 और X_3 है । μ का आकलन करने के लिए T_1, T_2 और T_3 आकलक हैं जो कि निम्नलिखित हैं :

$$T_1 = X_1 + X_2 - X_3; T_2 = 2X_1 + 3X_3 - 4X_2$$

$$\text{और } T_3 = \frac{1}{3} (\lambda X_1 + X_2 + X_3).$$

- (i) क्या T_1 और T_2 अनभिनत हैं ? कारण दीजिए ।
- (ii) λ का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए T_3 अनभिनत हो ।
- (iii) इनमें से कौन-सा सबसे अच्छा आकलक है ? कारण सहित बताइए ।
- (ख) दो समूहों में से 100 पदों वाले पहले समूह का माध्य 15 और मानक विचलन 3 है । पूरे समूह में 250 पद हैं और उनका माध्य 15.6 और मानक विचलन $\sqrt{13.44}$ है । दूसरे समूह का मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

5

5

5. (क) निम्नलिखित प्रा.घ.फ.

$$f(x, \theta) = \frac{2}{\theta^2} (\theta - x), \quad 0 \leq x \leq \theta$$

वाली एक समष्टि से एक प्रेक्षण लिया गया ।

θ के लिए $100(1 - \alpha)\%$ का विश्वस्यता अंतराल प्राप्त कीजिए ।

5

(ख) कीमत (X) और पूर्ति (Y) के 10 प्रेक्षणों से निम्नलिखित आँकड़े (उपयुक्त इकाइयों में) प्राप्त किए गए हैं :

$$\sum X = 130, \sum Y = 200, \sum X^2 = 2288, \sum Y^2 = 5506$$

और $\sum XY = 3467$.

X पर Y की समाश्रयण रेखा प्राप्त कीजिए और कीमत 16 इकाई होने पर पूर्ति भी आकलित कीजिए ।

5

6. (क) एक बड़ी समष्टि में, एक विशेष बीमारी के होने का अनुपात 0.01 है । 200 व्यक्तियों के एक यादृच्छ्या समूह में कम-से-कम चार व्यक्तियों को यह बीमारी होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

4

(ख) मान लीजिए एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन निम्नलिखित है :

x :	-3	6	9
P(X = x) :	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

E(X), V(X) और $E(2X + 1)^2$ ज्ञात कीजिए ।

4

- (ग) मान लीजिए X , $E(X) = 3$ और $E(X^2) = 13$ वाला एक यादृच्छिक चर है। $P[-2 < X < 8]$ का निम्न परिबंध ज्ञात कीजिए।

2

7. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य? अपने उत्तरों के पक्ष में एक संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण दीजिए।

10

- (क) एक समुच्चय के n मानों का उनके समांतर माध्य से विचलनों का बीजगणितीय योगफल n है।

- (ख) पारस्परिक अपवर्जी घटनाएँ स्वतंत्र होती हैं।

- (ग) द्विपद बंटन $\binom{10}{x} \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{3}{5}\right)^{10-x}$;

$x = 0, 1, 2, \dots, 10$ का माध्य 14 और प्रसरण 3 है।

- (घ) स्वातंत्र्य कोटि n वाले काई-वर्ग चर का आघूर्ण जनक फलन $(1 - 2t)^{-n/2}$ है।

- (ङ) यदि X , $N(0, 1)$ है, तो $Y = X^2$ प्राचलों $\alpha = \frac{1}{2}$ और $\lambda = \frac{1}{2}$ वाला गामा बंटन होगा।
