

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**

00676

Term-End Examination**June, 2016****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS****MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage : 70%)*

Note : Answer any *five* questions. All computations may be done upto 2 decimal places. Use of calculators is *not* allowed. Symbols have their usual meanings.

1. (a) Find the approximate root of the equation $2x^3 = 3x + 6$ using Newton - Raphson method. Perform only 3 iterations with $x_0 = 2$. 3
- (b) The roots of the quadratic equation $x^2 + ax + b = 0$ are given by α and β . Show that the iteration $x_{k+1} = \frac{-(ax_k + b)}{x_k}$ will converge near $x = \alpha$ when $|\alpha| > |\beta|$. 4

- (c) If $\delta^2 f(x_0) = C_1 h^2 f''(x_0) + C_2 h^4 f^{(4)}(x_0) + \dots$,
find the values of C_1 and C_2 . 3

2. (a) The Gauss – Seidel method is used to solve the system of equations

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determine the rate of convergence of the method. 5

- (b) Find the interpolating polynomial by Newton's divided difference formula for the following data : 3

x	0	1	2	4
y	1	1	2	5

- (c) Using synthetic division method, show that 2 is a simple root of the equation

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2 = 0. \quad 2$$

3. (a) Using Gauss - Jordan method, find the inverse of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

5

- (b) Find the largest step length that can be used for constructing a table of values for the function

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 5 \ln x, \quad 10 \leq x \leq 20,$$

so that a quadratic interpolation can be used with an accuracy of 5×10^{-6} .

5

4. (a) Find the missing values in the following table :

5

x	0	1	2	3	4	5
y	0	2	-	18	-	90

- (b) Using Classical Runge – Kutta fourth order method, find an approximate value of $y(1.2)$ for the IVP $\frac{dy}{dx} = xy$, $y(1) = 2$ with $h = 0.2$. 5

5. (a) For the following data, use Gauss backward difference method to obtain the interpolating polynomial $f(x)$:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	1.40	1.56	1.76	2.00	2.28

Hence, find the value of $f(0.45)$. 5

- (b) The velocity of a vehicle beginning from rest is given in the following table for part of the first hour. Using Simpson's $\frac{1}{3}$ rule, find the distance travelled by the vehicle in this hour : 5

t = time in min.	10	20	30	40	50	60
v = velocity in km/hr.	80	60	70	75	70	80

6. (a) Evaluate $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ by using trapezoidal

rule with $h = 0.5$ and $h = 0.25$. Use Romberg's method to find the best value of π .

5

(b) Estimate the eigenvalues of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

using the Gerschgorin bounds.

5

7. (a) Determine the largest eigenvalue in magnitude and the corresponding

eigenvector of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ using

the power method. Take $(1, 0, 0)^T$ as the initial approximation and perform 4 iterations.

5

(b) The method

$$x_{n+1} = \frac{1}{9} \left[5x_n + \frac{5N}{x_n^2} - \frac{N^2}{x_n^5} \right], n = 0, 1, 2, \dots$$

where N is a positive constant, converges to $N^{1/3}$. Find the rate of convergence of the method.

5

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(कुल का : 70%)

नोट : किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी अभिकलन दो दशमलव स्थानों तक निकटित कर सकते हैं । कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है । प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं ।

1. (क) न्यूटन - रैफसन विधि द्वारा समीकरण $2x^3 = 3x + 6$ का सन्निकट मूल ज्ञात कीजिए । $x_0 = 2$ लेकर केवल 3 पुनरावृत्तियाँ कीजिए । 3
- (ख) द्विघाती समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ के मूल α और β दिए गए हैं । दिखाइए कि पुनरावृत्ति $x_{k+1} = \frac{-(ax_k + b)}{x_k}$, $x = \alpha$ के समीप अभिसरित होगी जब $|\alpha| > |\beta|$ । 4

- (ग) यदि $\delta^2 f(x_0) = C_1 h^2 f''(x_0) + C_2 h^4 f^{(4)}(x_0) + \dots$,
तो C_1 और C_2 के मान ज्ञात कीजिए ।

3

2. (क) समीकरण निकाय

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

को हल करने के लिए गाउस - सीडल विधि का प्रयोग किया गया । विधि की अभिसरण दर ज्ञात कीजिए ।

5

- (ख) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए न्यूटन के विभाजित अंतर सूत्र द्वारा अंतर्वेशन बहुपद ज्ञात कीजिए :

3

x	0	1	2	4
y	1	1	2	5

- (ग) सांश्लेषिक विभाजन विधि का प्रयोग करके यह दर्शाइए कि 2, समीकरण $p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2 = 0$ का एक सरल मूल है ।

2

3. (क) गाउस - जॉर्डन विधि द्वारा आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ।

5

(ख) फलन $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 5 \ln x$, $10 \leq x \leq 20$ के मानों

की तालिका बनाने के लिए सोपान लंबाई का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए जिससे कि द्वितीय घात अंतर्वेशन का प्रयोग 5×10^{-6} तक की परिशुद्धता तक किया जा सके ।

5

4. (क) निम्नलिखित तालिका में लुप्त मान ज्ञात कीजिए :

5

x	0	1	2	3	4	5
y	0	2	-	18	-	90

(ख) आदि मान समस्या $\frac{dy}{dx} = xy$, $y(1) = 2$, जहाँ

$h = 0.2$, के लिए चिरप्रतिष्ठित चतुर्थ कोटि रूंगे - कुट्टा

विधि द्वारा $y(1.2)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए ।

5

5. (क) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए, गाउस पश्चांतर विधि का प्रयोग करके $f(x)$ को अंतर्वेशी करने वाला बहुपद प्राप्त कीजिए :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	1.40	1.56	1.76	2.00	2.28

अतः, $f(0.45)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

5

- (ख) विश्रामावस्था से आरंभ कर रही एक गाड़ी का वेग पहले घंटे के लिए निम्नलिखित तालिका में दिया गया है । सिम्पसन का $\frac{1}{3}$ नियम लागू करके, इस घंटे में गाड़ी द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए :

5

t = समय मिनट में	10	20	30	40	50	60
v = वेग किमी/घंटे में	80	60	70	75	70	80

6. (क) $h = 0.5$ और $h = 0.25$ लेकर समलंबी नियम द्वारा

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ का मूल्यांकन कीजिए। रॉम्बर्ग विधि}$$

द्वारा π का सर्वोत्तम मान ज्ञात कीजिए।

5

(ख) गर्शगोरिन परिवर्तनों का प्रयोग करके आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

के आइगेनमान आकलित कीजिए।

5

7. (क) घात विधि द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का परिमाण में अधिकतम आइगेनमान व संगत आइगेनसदिश ज्ञात कीजिए :

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

प्रारम्भिक सन्निकटन $(1, 0, 0)^T$ लेकर 4 पुनरावृत्तियाँ कीजिए।

5

(ख) विधि

$$x_{n+1} = \frac{1}{9} \left[5x_n + \frac{5N}{x_n^2} - \frac{N^2}{x_n^5} \right], n = 0, 1, 2, \dots,$$

जहाँ N एक धन अचर है, $N^{1/3}$ की ओर अभिसरित होती है। विधि की अभिसरण दर ज्ञात कीजिए।

5