

**BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME
(BDP)**03907 **Term-End Examination****June, 2016****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS****MTE-07 : ADVANCED CALCULUS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**(Weightage 70%)*

Note : Question no. 1 is compulsory. Attempt any **four** questions out of the remaining questions. Use of calculators is **not** allowed.

1. State whether the following statements are *True* or *False*. Justify your answer. 10
- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ does not exist.
- (b) The set $\{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z < 0\}$ is a domain in \mathbf{R}^3 .
- (c) The level curves of $z = y/x$ are hyperbolas.
- (d) The function $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, defined by $T(x, y) = (e^{xy}, e^{x+y})$ is conservative.
- (e) The function $f(x, y, z) = e^{xyz}$ is integrable over $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

2. (a) Evaluate $\iiint_D 4xy^2z \, dx \, dy \, dz$, where

$$D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2, y \leq z \leq 2y\}. \quad 4$$

(b) Identify the indeterminate form and evaluate the limits : 6

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^3$

3. (a) Using polar coordinates, show that $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0$. Also, find the two

repeated limits. 5

(b) Find the centre of gravity of a mass in the shape of a semicircular disc of radius 4, if the density at (x, y) is $\frac{2y}{x^2 + y^2}$. 5

4. (a) If $u = x \cos y$, $v = ye^z$, $w = \sin xz$, find the Jacobian $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$, and evaluate it at

$(2, 0, \pi/3)$. 4

$$(b) \text{ Let } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^5}{x^2 + y^4} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Check whether f_{xy} and f_{yx} are equal or not. 4

(c) Find the slope of the tangent at $(3, 1, 1)$ to the curve of intersection of $x = 3$ and $z = x^2y - 3xy^2 + 1$. 2

5. (a) Find the second Taylor polynomial of $f(x, y) = 1 + 3x^2y - 4y^3$ at $(1, 1)$. 4

(b) If $f(x, y) = \frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$, show that $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{20} f(x, y)$, stating the results used. 4

(c) If $f(x, y, z) = (\cos x, \sin y, \tan z)$ and $g(x, y, z) = (x - 3, y^2 - 1, z^2 - 1)$, then find $f \circ g$. 2

6. (a) Evaluate by reversing the order of integration :

$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin(\pi x^3) dx dy.$$

Draw a sketch of the region of integration. 6

(b) Find the points (x, y) on the unit circle, at which the product xy is maximum or minimum. 4

7. (a) State inverse function theorem. Apply this theorem to check the local invertibility of the function $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ given by

$$f(x, y) = (y \cos x, x - y + 2)$$

at the point $(0, \pi)$.

4

- (b) Find the derivative of $f(x) = e^{x \ln x} + x^2$ using the concept of total derivative.

3

- (c) Find the values of a and b for which

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + e^{-x} + bx}{1 - \cos x}$$

exists.

3

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2016

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(कुल का 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है। शेष प्रश्नों में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटर्स के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 10

(क) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ का अस्तित्व नहीं होता।

(ख) समुच्चय $\{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z < 0\}$ \mathbb{R}^3 में एक प्रांत है।

(ग) $z = y/x$ के स्तर वक्र अतिपरवलय हैं।

(घ) $T(x, y) = (e^{xy}, e^{x+y})$ द्वारा परिभाषित फलन
 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ संरक्षी है।

(ङ) फलन $f(x, y, z) = e^{xyz}$, $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ पर समाकलनीय है।

2. (क) $\iiint_D 4xy^2z \, dx \, dy \, dz$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ

$$D = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2, y \leq z \leq 2y\}. \quad 4$$

(ख) अनिर्धार्य रूपों का पता लगाइए और निम्नलिखित सीमाओं का मूल्यांकन कीजिए : 6

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^3$

3. (क) ध्रुवीय निर्देशांकों द्वारा दिखाइए कि

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0. \text{ दो पुनरावृत्त सीमाएँ भी ज्ञात कीजिए।} \quad 5$$

(ख) त्रिज्या 4 की अर्धवृत्ताकार चक्रिका में द्रव्यमान का गुरुत्व केंद्र ज्ञात कीजिए, यदि (x, y) पर घनत्व $\frac{2y}{x^2 + y^2}$ है। 5

4. (क) यदि $u = x \cos y$, $v = ye^z$, $w = \sin xz$ है, तब जैकोबी $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ ज्ञात कीजिए, और $(2, 0, \pi/3)$ पर इसका मूल्यांकन कीजिए। 4

(ख) मान लीजिए

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^5}{x^2 + y^4} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

जाँच कीजिए कि f_{xy} और f_{yx} समान हैं या नहीं। 4

(ग) $x = 3$ और $z = x^2y - 3xy^2 + 1$ के प्रतिच्छेद वक्रों के बिन्दु $(3, 1, 1)$ पर स्पर्शरेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए। 2

5. (क) $(1, 1)$ पर $f(x, y) = 1 + 3x^2y - 4y^3$ का द्वितीय टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। 4

(ख) यदि $f(x, y) = \frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$, तब इस्तेमाल किए गए परिणामों को बताते हुए दिखाइए कि $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{20} f(x, y)$. 4

(ग) यदि $f(x, y, z) = (\cos x, \sin y, \tan z)$ और $g(x, y, z) = (x - 3, y^2 - 1, z^2 - 1)$, तब $f \circ g$ ज्ञात कीजिए। 2

6. (क) निम्नलिखित समाकलन के क्रम को परिवर्तन करने के बाद इसका मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin(\pi x^3) dx dy.$$

समाकलन के प्रदेश का चित्र भी बनाइए। 6

(ख) एकक वृत्त पर वे बिन्दु (x, y) ज्ञात कीजिए जिनमें गुणनफल xy निम्निष्ठ या उच्चिष्ठ हो। 4

7. (क) प्रतिलोम फलन प्रमेय का कथन दीजिए । बिन्दु $(0, \pi)$ पर $f(x, y) = (y \cos x, x - y + 2)$ द्वारा दिए गए फलन $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ की स्थानिक व्युत्क्रमणीयता की जाँच करने के लिए इस प्रमेय को लागू कीजिए । 4

(ख) संपूर्ण (कुल) अवकलजों की अवधारणा द्वारा $f(x) = e^x \ln x + x^2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए । 3

(ग) a और b के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + e^{-x} + bx}{1 - \cos x}$$

का अस्तित्व हो । 3