

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME(BDP)

Term-End Examination

June, 2014

01971

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-12 : LINEAR PROGRAMMING

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is compulsory. Do any four questions out of question nos. 2 to 7. Calculators are not allowed.*

1. State which of the following statements are *true* and which are *false*. Give reasons for your answer with a short proof or counter example. $5 \times 2 = 10$
 - (a) A constraint in an LP problem restricts the use of available resource.
 - (b) When maximin value of the game is less than or equal to minimax values of the game, then saddle point exists.
 - (c) The solution to a transportation problem with m -rows (supplies) and n -columns (destinations) is feasible if number of positive allocations are $m + n$.
 - (d) $S = \{(x, y) : 2x + y \leq 4 \text{ or } x + 2y \leq 4\}$ is a convex set.
 - (e) If the dual LPP is unbounded, then the primal LPP is bounded.

2. (a) A dairy firm has three plants located in a state. The daily milk production at each plant is as follows :

Plant 1 : 6 thousand litres
 Plant 2 : 1 thousand litres
 Plant 3 : 10 thousand litres

Each day, the firm must fulfil the needs of its four distribution centres. Minimum requirement at each centre is as follows :

Distribution centre 1 : 7 thousand litres
 Distribution centre 2 : 5 thousand litres
 Distribution centre 3 : 3 thousand litres
 Distribution centre 4 : 2 thousand litres

Cost in hundreds of rupees of shipping one thousand litres from each plant to each distribution centre is given in the following table :

		Distribution Centre			
		D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
Plant	P ₁	2	3	11	7
	P ₂	1	0	6	1
	P ₃	5	8	15	9

Find initial basic feasible solution for the given problem by using North-West corner method, and Matrix-Minima method. Which of the two solutions is better ? Justify your answer.

- (b) Obtain the dual problem of the following primal LP problem :

$$\text{Minimize } z = x_1 - 3x_2 - 2x_3$$

$$\text{subject to } 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7$$

$$2x_1 - 4x_2 \geq 12$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 10$$

$x_1, x_2 \geq 0, x_3$ unrestricted in sign.

Your dual should have only three variables. 5

3. (a) Use the simplex method to solve the following LP problem :

$$\text{Maximize } z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$\text{subject to } 2x_1 + 3x_2 \leq 8$$

$$2x_2 + 5x_3 \leq 10$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

- (b) Use graphical method to solve the following game :

		Player B			
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
Player A	A ₁	2	2	3	-2
	A ₂	4	3	2	6

4. (a) Using the principle of dominance, solve the game whose pay-off matrix is given below : 6

		Player B			
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
Player A	A ₁	4	3	5	1
	A ₂	4	5	3	5
	A ₃	5	3	5	1
	A ₄	1	5	1	9

- (b) Without sketching the region, check whether P (0, 0) is in the convex hull of the points A (-1, -1), B (1, 0) and C (0, 1). If it is in the region, write P as convex combination of A, B and C. 4

5. (a) Use the graphical method to solve the following LP problem : 5

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximize } z = 2x_1 + 3x_2 \\
 &\text{subject to } \quad x_1 + x_2 \leq 30 \\
 &\quad \quad \quad x_2 \geq 3 \\
 &\quad \quad \quad 0 \leq x_2 \leq 12 \\
 &\quad \quad \quad 0 \leq x_1 \leq 20 \\
 &\quad \quad \quad x_1 - x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- (b) Solve the following cost minimization assignment problem :

5

		Job				
		P	Q	R	S	T
Machine	A	85	75	65	125	75
	B	90	78	66	132	78
	C	75	66	57	114	69
	D	80	72	60	120	72
	E	76	64	56	112	68

6. (a) A businessman has to get 5 cabinets, 12 desks and 18 shelves cleaned. He has two part-time employees, Anjali and Arnav. Anjali can clean 1 cabinet, 3 desks and 3 shelves in a day, while Arnav can clean 1 cabinet, 2 desks and 3 shelves in a day. Arnav is paid ₹ 22 per day and Anjali is paid ₹ 25 per day. Formulate the problem of finding the number of days for which Anjali and Arnav have to be employed to get the cleaning done with minimum cost as a linear programming problem.

5

- (b) For the following pay-off matrix, transform the zero-sum game into an equivalent linear programming problem :

5

		Player B		
		B ₁	B ₂	B ₃
Player A	A ₁	1	-1	3
	A ₂	3	5	-3
	A ₃	6	2	-2

7. (a) Solve the following LP problem by using two-phase simplex method :

5

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \text{subject to} \quad & -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

- (b) The initial basic feasible solution of a transportation problem is given below :

	W_1	W_2	W_3	Supply
F_1	16 (180)	20	12 (20)	200
F_2	14	8 (120)	18 (40)	160
F_3	26	24	16 (90)	90
Demand	180	120	150	450

Check whether the given solution is optimal. If it is not, then find the optimal solution.

5

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-12 : रैखिक प्रोग्रामन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : प्रश्न सं. 1 करना अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से कोई चार प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य। अपने उत्तर की संक्षिप्त उपपत्ति या प्रत्युदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए। 5×2=10
- (क) LP समस्या में व्यवरोध, उपलब्ध संसाधन के प्रयोग को प्रतिबंधित करता है।
- (ख) जब किसी खेल का महाल्पिष्ठ मान, खेल के अल्पमहिष्ठ मान से कम या बराबर होता है, तो खेल का पल्याण बिन्दु होता है।
- (ग) m -पंक्तियों (आपूर्ति) और n -स्तम्भों (गंतव्य) वाली परिवहन समस्या का हल संगत होगा यदि धनात्मक आबंटनों की संख्या $m + n$ है।
- (घ) $S = \{(x, y) : 2x + y \leq 4 \text{ या } x + 2y \leq 4\}$ एक अवमुख समुच्चय है।
- (ङ) यदि द्वैती LPP अपरिबद्ध है, तो आद्य LPP परिबद्ध होगी।

2. (क) एक दूध की फर्म के एक राज्य में तीन प्लान्ट हैं ।
प्रत्येक कारखाने में प्रतिदिन दूध का उत्पादन
निम्नलिखित है :

कारखाना 1 : 6 हजार लीटर
कारखाना 2 : 1 हजार लीटर
कारखाना 3 : 10 हजार लीटर

प्रत्येक दिन, फर्म अपने चार वितरण केन्द्रों की
आवश्यकता की पूर्ति करती है । प्रत्येक केन्द्र पर
न्यूनतम आवश्यकता निम्नलिखित है :

वितरण केंद्र 1 : 7 हजार लीटर
वितरण केंद्र 2 : 5 हजार लीटर
वितरण केंद्र 3 : 3 हजार लीटर
वितरण केंद्र 4 : 2 हजार लीटर

प्रत्येक कारखाने से 1 हजार लीटर दूध को प्रत्येक
वितरण केन्द्र पर ले जाने की कीमत (सौ रुपयों में)
निम्नलिखित तालिका में दी गयी है :

		वितरण केन्द्र			
		D ₁	D ₂	D ₃	D ₄
कारखाने	P ₁	2	3	11	7
	P ₂	1	0	6	1
	P ₃	5	8	15	9

उत्तर-पश्चिम विधि और न्यूनतम आव्यूह विधि से दी
गयी समस्या का प्रारम्भिक आधारी सुसंगत हल ज्ञात
कीजिए । दोनों में से कौन-सा हल उत्तम है ? अपने उत्तर
का कारण दीजिए ।

(ख) निम्नलिखित आद्य LP समस्या की द्वैती समस्या लिखिए :

$$z = x_1 - 3x_2 - 2x_3 \text{ का न्यूनतमीकरण कीजिए}$$

$$\text{जबकि} \quad 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7$$

$$2x_1 - 4x_2 \geq 12$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0, x_3 \text{ चिह्न में अप्रतिबंधित है।}$$

आपके द्वारा प्राप्त की जाने वाली द्वैती में केवल तीन चर होने चाहिए।

5

3. (क) निम्नलिखित LP समस्या को एकधा विधि से हल कीजिए :

6

$$z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \text{ का अधिकतमीकरण कीजिए}$$

$$\text{जबकि} \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 8$$

$$2x_2 + 5x_3 \leq 10$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(ख) ग्राफीय-विधि का प्रयोग करके निम्नलिखित खेल को हल कीजिए :

4

		खिलाड़ी B			
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
खिलाड़ी A	A ₁	2	2	3	-2
	A ₂	4	3	2	6

4. (क) प्रमुखता सिद्धान्त का प्रयोग करके नीचे दिए गए भुगतान आव्यूह वाले खेल को हल कीजिए :

6

		खिलाड़ी B			
		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄
खिलाड़ी A	A ₁	4	3	5	1
	A ₂	4	5	3	5
	A ₃	5	3	5	1
	A ₄	1	5	1	9

- (ख) क्षेत्र का रेखाचित्र बनाए बिना जाँच कीजिए कि क्या P (0, 0), बिन्दुओं A (-1, -1), B (1, 0) और C (0, 1) के अवमुख समावर्क में है। यदि यह क्षेत्र में है, तो P को A, B और C के अवमुख संयोजन में लिखिए।

4

5. (क) निम्नलिखित LP समस्या को ग्राफीय-विधि से हल कीजिए :

5

$$z = 2x_1 + 3x_2 \text{ का अधिकतमीकरण कीजिए}$$

$$\text{जबकि } x_1 + x_2 \leq 30$$

$$x_2 \geq 3$$

$$0 \leq x_2 \leq 12$$

$$0 \leq x_1 \leq 20$$

$$x_1 - x_2 \geq 0$$

- (ख) निम्नलिखित न्यूनतम खर्च नियतन समस्या को हल कीजिए :

5

		जॉब				
		P	Q	R	S	T
मशीन	A	85	75	65	125	75
	B	90	78	66	132	78
	C	75	66	57	114	69
	D	80	72	60	120	72
	E	76	64	56	112	68

6. (क) एक व्यापारी को 5 केबिनेट, 12 डेस्क और 18 शैल्फ की सफाई करवानी है। उसके पास दो कर्मचारी अंजली और अरनव हैं। अंजली एक दिन में 1 केबिनेट, 3 डेस्क और 3 शैल्फ साफ कर सकती है जबकि अरनव एक दिन में 1 केबिनेट, 2 डेस्क और 3 शैल्फ साफ कर सकता है। वह अरनव और अंजली को क्रमशः ₹ 22 और ₹ 25 प्रतिदिन देता है। सफाई के खर्च का न्यूनतमीकरण करने के लिए उसे अरनव और अंजली को कितने दिन काम पर लगाना चाहिए, इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या में सूत्रित कीजिए।

5

- (ख) निम्नलिखित भुगतान आव्यूह से प्राप्त शून्य-जोड़ खेल को तुल्य रैखिक प्रोग्रामन समस्या में परिवर्तित कीजिए :

5

		खिलाड़ी B		
		B ₁	B ₂	B ₃
खिलाड़ी A	A ₁	1	-1	3
	A ₂	3	5	-3
	A ₃	6	2	-2

7. (क) निम्नलिखित LP समस्या को द्वि-चरण एकधा विधि से हल कीजिए :

5

$$z = x_1 - 2x_2 - 3x_3 \text{ का न्यूनतमीकरण कीजिए}$$

$$\text{जबकि} \quad -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

- (ख) एक परिवहन समस्या का प्रारम्भिक आधारी सुसंगत हल नीचे दिया गया है :

	W_1	W_2	W_3	पूर्ति
F_1	16 (180)	20	12 (20)	200
F_2	14	8 (120)	18 (40)	160
F_3	26	24	16 (90)	90
माँग	180	120	150	450

जाँच कीजिए कि क्या दिया गया हल इष्टतम है । यदि ऐसा नहीं है, तो इष्टतम हल ज्ञात कीजिए ।

5