

## BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

## Term-End Examination

June, 2014

03281

## ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

## MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

**Note :** Answer any **five** questions. **All** computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculators is **not** allowed.

1. (a) Find an interval of unit length which contains the root of the equation  $x^3 - 3x - 5 = 0$ . Using Newton - Raphson's method, perform two iterations to find the approximate value of root. 3

- (b) The area  $A$  of a circle of diameter  $d$  is given for the following values :

d	80	85	90	95	100
A	5026	5674	6362	7088	7854

Find approximate value for the area of circle of diameter 82 using Newton's forward difference formula. 4

- (c) Construct a fixed point iteration form  $x = g(x)$  for the equation  $x^3 + x^2 - 1 = 0$  so that the method converges in the interval  $[0, 1]$ . 3

2. (a) Find the inverse of the matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

using LU decomposition. 5

- (b) The following table of values is given :

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y(x)	1.8054	1.5769	1.2834	0.9483	0.5981

- \* Using all possible values of  $h$ , find approximate value of  $y''(0.4)$  using the difference formula

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} [y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)]. \quad 5$$

3. (a) Use Stirling's formula to find  $y_{35}$ , given

$$y_{20} = 512, y_{30} = 439, y_{40} = 346, y_{50} = 243. \quad 5$$

- (b) The Gauss – Seidel method is used to solve the system of equations :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -21 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Check whether the method converges for the given system of equations or not.

5

4. (a) Set up divided difference table for the following function and hence find the interpolating polynomial :

4

x	-3	-1	0	2	3
f(x)	-9	5	3	11	33

- (b) Use fourth order classical Runge – Kutta method to approximate  $y_2$  when  $h = 0.1$ ,

given that  $y = 1$  when  $x = 0$  and  $\frac{dy}{dx} = x + y$ .

6

5. (a) Use Lagrange's interpolation to find  $f(3)$  from the following table :

4

x	0	1	2	4	5	6
f(x)	1	14	15	5	6	19

(b) For the method

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} \{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)\}$$

determine the optimal value of  $h$  based on the criteria :

Max | Truncation error | =

Max | Round-off error |

when  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ,  $1 \leq x \leq 2$  and the maximum round-off error in evaluating  $f(x)$  is 0.005.

6

6. (a) Use the Composite Trapezoidal rule to

evaluate the integral  $\int_{0.1}^{0.5} f(x) dx$  where  $f(x)$

is given by

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	0.425	0.475	0.400	0.450	0.575

Integrate with all possible values of the step lengths. Improve the results obtained using Romberg integration.

5

(b) Express  $\sqrt{1 + \mu^2 \delta^2}$  in terms of  $\delta^2$  and a constant.

3

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

**नोट :** कोई पाँच प्रश्न हल कीजिए । सभी अभिकलन तीन दशमलव स्थानों तक निकटित कर सकते हैं । कैलकुलेटरों के प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।

1. (क) एकक लम्बाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जो समीकरण  $x^3 - 3x - 5 = 0$  के मूल को अंतर्विष्ट करता हो । न्यूटन - रैफसन विधि की दो पुनरावृत्तियाँ करके मूल का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए । 3

- (ख) व्यास  $d$  वाले वृत्त के क्षेत्रफल  $A$  के निम्न मान दिए गए हैं :

d	80	85	90	95	100
A	5026	5674	6362	7088	7854

न्यूटन के अग्रान्तर सूत्र द्वारा व्यास 82 वाले वृत्त के क्षेत्रफल का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए । 4

(c) If  $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta^2 f_k = a \Delta f_n + b \Delta f_0$  then find the values of a and b. 2

7. (a) Suppose that the roots of the equation  $x^2 + px + q = 0$  are a and b. A fixed point iteration method is written as

$$x_{i+1} = \frac{-q}{x_i + p}.$$

Find the condition on a, b such that this iteration method converges to the root a. 4

(b) Using three iterations of the inverse power method, find the eigenvalue nearest to 5.5, of the matrix  $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ . Assume the

initial approximation to the eigenvector as  $\mathbf{v}^{(0)} = [0.6 \ 0.5]^T$ . 6

(ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल करने के लिए गाउस – सीडल विधि का प्रयोग किया गया :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -21 \\ -1 \end{bmatrix}$$

जाँच कीजिए कि दिए गए समीकरण निकाय के लिए विधि अभिसरित होती है अथवा नहीं ।

5

4. (क) निम्नलिखित फलन के लिए विभाजित अंतर तालिका स्थापित कीजिए और फिर उसका अंतर्वेशन बहुपद ज्ञात कीजिए :

4

x	-3	-1	0	2	3
f(x)	-9	5	3	11	33

- (ख) चतुर्थ कोटि चिरप्रतिष्ठित रूंगे – कुट्टा विधि का प्रयोग करके  $y_2$  को सन्निकटित कीजिए जबकि  $h = 0.1$  हो, और दिया गया है कि  $\frac{dy}{dx} = x + y$  और  $x = 0$  पर  $y = 1$  है ।

6

5. (क) लग्रांज अंतर्वेशन का प्रयोग करके निम्नलिखित तालिका से  $f(3)$  का मान ज्ञात कीजिए :

4

x	0	1	2	4	5	6
f(x)	1	14	15	5	6	19

- (ग) समीकरण  $x^3 + x^2 - 1 = 0$  के लिए  $x = g(x)$  के रूप में ऐसी नियत बिन्दु पुनरावृत्ति बनाइए जो अंतराल  $[0, 1]$  में अभिसरित होती हो । 3

2. (क) LU वियोजन विधि का प्रयोग करके आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए । 5

- (ख) निम्नलिखित मानों की तालिका दी गयी है :

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y(x)	1.8054	1.5769	1.2834	0.9483	0.5981

अन्तर सूत्र

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} [y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)]$$

का प्रयोग करके  $h$  के सभी संभव मानों के लिए

$y''(0.4)$  का सन्निकट मान प्राप्त कीजिए । 5

3. (क) दिया गया है  $y_{20} = 512$ ,  $y_{30} = 439$ ,  $y_{40} = 346$

और  $y_{50} = 243$  हो, तो स्टालग सूत्र का प्रयोग करके

$y_{35}$  ज्ञात कीजिए । 5



(ख) विधि

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} \{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)\}$$

के लिए निकष

$$\text{Max | रूंडन-त्रुटि |} = \text{Max | निकटन-त्रुटि |}$$

को लागू करके h का इष्टतम मान ज्ञात कीजिए जबकि

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad 1 \leq x \leq 2 \text{ और } f(x) \text{ के आकलन में}$$

अधिकतम निकटन-त्रुटि 0.005 है ।

6

6. (क) संयुक्त समलंबी नियम का प्रयोग करके समाकल

$$\int_{0.1}^{0.5} f(x) dx \text{ का मान प्राप्त कीजिए जहाँ } f(x)$$

निम्नलिखित द्वारा प्राप्त है :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	0.425	0.475	0.400	0.450	0.575

सोपान लम्बाई के सभी संभव मानों के लिए समाकलन कीजिए । रॉम्बर्ग समाकलन द्वारा प्राप्त परिणामों में सुधार कीजिए ।

5

(ख)  $\sqrt{1 + \mu^2 \delta^2}$  को  $\delta^2$  और एक अचर के पदों में व्यक्त कीजिए ।

3

(ग) यदि  $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta^2 f_k = a \Delta f_n + b \Delta f_0$  तो a और b के

मान ज्ञात कीजिए ।

2

7. (क) मान लीजिए कि समीकरण  $x^2 + px + q = 0$  के मूल a और b हैं । एक नियत बिन्दु पुनरावृत्ति विधि इस प्रकार है :

$$x_{i+1} = \frac{-q}{x_i + p}$$

a और b पर प्रतिबंध ज्ञात कीजिए जिससे कि यह पुनरावृत्ति विधि मूल a की ओर अभिसरित हो ।

4

(ख) प्रतिलोम घात विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ करके

आव्यूह  $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  का 5.5 के निकटतम आइगेनमान

ज्ञात कीजिए । आइगेनसदिश का आरंभिक सन्निकटन  $\mathbf{v}^{(0)} = [0.6 \ 0.5]^T$  मान कर चलिए ।

6