

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

00791

Term-End Examination

June, 2014

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-09 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage : 70%)

Note : Attempt **five** questions in all. Question no. 1 is **compulsory**. Do any **four** questions out of questions no. 2 to 7.

1. Which of the following statements are *True* or *False* ? Give reasons for your answer. $2 \times 5 = 10$
- (a) There exists no uncountable subset of \mathbf{R} other than \mathbf{R} itself and $\mathbf{R} \sim \mathbf{Q}$.
- (b) The greatest integer function $[x]$ is not integrable on $]3, 4[$.
- (c) The set $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}$ is an open set.
- (d) If $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$, then the series $\sum U_n$ is convergent.
- (e) Every continuous function is differentiable.

2. (a) Prove that the sequence $\{f_n(x)\}$, where $f_n(x) = x^n$ is uniformly convergent on $[0, k]$, $k < 1$ and not uniformly convergent on $[0, 1]$. 5
- (b) Check whether the function $f : [1, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ defined by $f(x) = x + e^x$ is one-one or not. Is the function onto? Justify your answer. 3
- (c) Check whether the set $[1, 2] \cup]2, 3[\cup [3, 4]$ is compact or not. 2
3. (a) Prove that $x^4 + 3x + 1 = 0$ has a root in $[-1, 1]$. 4
- (b) Test for convergence of the following series : 4
- (i) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \dots$
- (ii) $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$
- (c) Check whether the set $\left\{\frac{1}{3^n} : n \in \mathbf{Z}\right\}$ is bounded or not. 2
4. (a) Prove that the function f defined by
- $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \text{ is rational} \\ \frac{1}{2}, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$
- is discontinuous at every point of \mathbf{R} . 4

(b) Let $a_n = \frac{x^n}{n!}$, where $|x| < 1$.

Define $s_n = \frac{5 + 3a_n}{3 + 4a_n}$.

Show that (s_n) converges and $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{5}{3}$. 4

(c) Show that

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^x = e^2 \quad 2$$

5. (a) Represent geometrically the number $\sqrt{5}$ on the real line. 2

(b) Test the absolute and conditional convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n+7}$. 4

(c) Prove that $x < -\log(1-x) < x(1-x)^{-1}$, $0 < x < 1$. 4

6. (a) Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) \quad 4$$

- (b) If the partition P^* is a refinement of the partition P of $[a, b]$, then for any bounded function f on $[a, b]$, prove that

$$U(P^*, f) \leq U(P, f). \quad 4$$

- (c) Find the domain and range of the function $f(x) = |x| + 3$. Also draw its graph. 2

7. (a) Find local maximum at local minimum value of the function

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 7. \quad 4$$

- (b) Prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2}{(n^2 + 1)^{3/2}} + \frac{n^2}{(n^2 + 2^2)^{3/2}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{2} \cdot n} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 4$$

- (c) Prove that $f(x) = x^2$ is uniformly continuous on $[1, 2]$. 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-09 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का : 70%)

नोट : कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है ।
प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? अपने उत्तर के कारण दीजिए । 2×5=10
 - (क) स्वयं \mathbf{R} और $\mathbf{R} \sim \mathbf{Q}$ के अलावा \mathbf{R} का कोई भी उप-समुच्चय अगणनीय नहीं है ।
 - (ख) महत्तम पूर्णांक फलन $[x]$, $]3, 4[$ पर समाकलनीय नहीं है ।
 - (ग) समुच्चय $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}$ विवृत समुच्चय है ।
 - (घ) यदि $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$, तो श्रेणी $\sum U_n$ अभिसारी होती है ।
 - (ङ) प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है ।

2. (क) सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{f_n(x)\}$, जहाँ $f_n(x) = x^n$, $[0, k]$, $k < 1$ पर एकसमानतः अभिसारी है और $[0, 1]$ पर एकसमानतः अभिसारी नहीं है । 5

(ख) जाँच कीजिए कि $f(x) = x + e^x$ से परिभाषित फलन $f : [1, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ एकैकी है या नहीं । क्या यह फलन आच्छादी है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 3

(ग) जाँच कीजिए कि समुच्चय $[1, 2] \cup]2, 3[\cup [3, 4]$ संहत है या नहीं । 2

3. (क) सिद्ध कीजिए कि $x^4 + 3x + 1 = 0$ का एक मूल $[-1, 1]$ में है । 4

(ख) निम्नलिखित श्रेणियों के अभिसरण का परीक्षण कीजिए : 4

(i) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \dots$

(ii) $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(ग) जाँच कीजिए कि समुच्चय $\left\{\frac{1}{3^n} : n \in \mathbf{Z}\right\}$ परिवद्ध है या नहीं । 2

4. (क) सिद्ध कीजिए कि

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ \frac{1}{2}, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f , \mathbf{R} के प्रत्येक बिन्दु पर असंतत है । 4

(ख) मान लीजिए $a_n = \frac{x^n}{n!}$, जहाँ $|x| < 1$.

परिभाषित कीजिए $s_n = \frac{5 + 3a_n}{3 + 4a_n}$.

दिखाइए कि (s_n) अभिसरण करता है और

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{5}{3} \text{ है।} \quad 4$$

(ग) दिखाइए कि

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^x = e^2 \quad 2$$

5. (क) संख्या $\sqrt{5}$ को ज्यामितीय रूप में वास्तविक रेखा पर निरूपित कीजिए। 2

(ख) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n+7}$ के निरपेक्ष और सप्रतिबंध अभिसरण की जाँच कीजिए। 4

(ग) सिद्ध कीजिए कि

$$x < -\log(1-x) < x(1-x)^{-1}, \quad 0 < x < 1. \quad 4$$

6. (क) मूल्यांकन कीजिए:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) \quad 4$$

(ख) यदि विभाजन P^* , $[a, b]$ के विभाजन P का अधिशोधन है, तो $[a, b]$ पर किसी भी परिवर्द्ध फलन f के लिए सिद्ध कीजिए

$$U(P^*, f) \leq U(P, f). \quad 4$$

(ग) फलन $f(x) = |x| + 3$ के प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए। इसका आलेख भी खींचिए। 2

7. (क) फलन $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 7$ के स्थानीय निम्निष्ठ मान पर स्थानीय उच्चिष्ठ ज्ञात कीजिए। 4

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2}{(n^2 + 1)^{3/2}} + \frac{n^2}{(n^2 + 2^2)^{3/2}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{2} \cdot n} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 4$$

(ग) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^2$, $[1, 2]$ पर एकसमान संतत है। 2