No. of Printed Pages : 8

MTE-07

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

03401

Term-End Examination

June, 2014

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage : 70%)

Note : *Question no. 1 is* ***compulsory****. Answer any* ***four*** *questions out of the remaining questions no. 2 – 7. Calculators are* ***not*** *allowed.*

1. State whether the following statements are true or false. Give reasons for your answers. *2×5=10*

(a) Domain of the sum function of $g(x) = x \sin \frac{1}{y}$ and $f(x, y) = y \sin \frac{1}{x}$ is

$\{(x, y) : x \neq 0 \text{ and } y \neq 0\}$.

(b) Gradient of the function $f(x, y) = x^2 + y^2$ is $(2x, 2y)$.

(c) If for a function $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, all the partial derivatives f_x, f_y, f_z exist at a point (a, b, c), then f is continuous at the point (a, b, c).

(d) The function $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ given by $F(x, y) = (\cos x, \sin xy)$ is locally invertible at the point $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$.

(e) Every continuous function from $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is differentiable as well as integrable on $\mathbb{R}^2$.

2. (a) Examine the following function for continuity at the origin : *3*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{if} \quad x^4 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{if} \quad x = 0 = y \end{cases}$$

(b) If $z = \tan^{-1}\left(\dfrac{x^5 + y^5}{x^2 + y^2}\right)$, then show that

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3 \sin z \cos z. \qquad 3$$

(c) Integrate the function $f(x, y, z) = 2x + y$ over the region W which is a hemisphere $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x > 0$. *4*

3. (a) Find the minimum value of the function $f(x, y) = x^2 + y$ on $2x^2 - 3y^2 = 1$. *5*

(b) Compute the double integral of the function $x\sqrt{4 - y^2}$ over the rectangle $[0, 1] \times [0, 2]$. *3*

(c) Evaluate : *2*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 3\cos x}{3x + 2\sin x}$$

4. (a) Find the level curves of the graph of which the function is the difference of two functions f and g where $f(x, y) = 3x + 4y$ and $g(x, y) = x - y$. 2

(b) Show that the following line integral is independent of path and hence evaluate it :

$$\int_{(0,5)}^{(1,2)} (y^2 + 3x^2y)\,dx + (2xy + x^3)\,dy.$$ 5

(c) Examine the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|y|}, & y \neq 0 \\ x, & y = 0 \end{cases}$$

for differentiability at (1, 0). 3

5. (a) Show that

$$\{(x, y) \mid |x - 5| \leq 7 \text{ and } |y - 3| \leq 9\} \subseteq \{(x, y) \mid (x - 1)^2 + (y - 2)^2 < 15^2\}$$ 3

(b) Find the surface area of the part of the surface, $z = x^2 + 2y$ that lies above the triangular region T in the xy-plane with the vertices (0, 0), (1, 0) and (1, 1). 4

(c) Let $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 5$. Is the Taylor polynomial $T_2(x, y)$ of f at (1, 1) equal to f(x, y) ? 3

6. (a) State Young's theorem. Using Young's theorem, show that $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ at every point (a, b), where f is a polynomial function. Verify this result for the polynomial $x^3 + 2x^2y + 5xy + 4x + 3y + 1$. *4*

(b) Does the chain rule for the following functions hold ? Check.
$x = u^2 + v^2$, $y = u + v$, where $u = z + w$ and $v = 2zw$. *4*

(c) Examine the existence of fog and gof and find, if they exist, for the functions
$f(x, y, z) = (x, y, z)$; $g(x, y) = x \sin y$. *2*

7. (a) Verify the Implicit Function Theorem for the equation $xy - 3x^2 + 2 = 0$ at the point (1, 1). *4*

(b) Evaluate : *3*

$$\lim_{x \to 0} \frac{5^x - 7^x}{2x}$$

(c) Let $e = (1, 1, 0)$ and $f = (0, 1, -1)$ and $x = e + 2f$, $y = 2e - f$. Find $|x - y|$, $|2x + 3y|$ and check the inequality $|x - y| \leq |2x + 3y|$. Is it true ? *3*

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-07 : उच्च कलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का : 70%)

नोट: *प्रश्न सं. 1 करना **अनिवार्य** है । प्रश्न सं. 2 से 7 में से कोई **चार** प्रश्न कीजिए । कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है ।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य । अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए । *2×5=10*

(क) $g(x) = x \sin \frac{1}{y}$ और $f(x, y) = y \sin \frac{1}{x}$ के योग फलन का प्रांत $\{(x, y) : x \neq 0$ और $y \neq 0\}$ है ।

(ख) फलन $f(x, y) = x^2 + y^2$ की प्रवणता $(2x, 2y)$ है ।

(ग) फलन $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ के लिए यदि सभी आंशिक अवकलजों f_x, f_y, f_z का बिन्दु (a, b, c) पर अस्तित्व होता है, तब f, बिन्दु (a, b, c) पर संतत होता है ।

(घ) $F(x, y) = (\cos x, \sin xy)$ द्वारा दिया गया फलन $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ बिन्दु $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ पर स्थानिकतः व्युत्क्रमणीय होता है ।

(ङ) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ तक प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय तथा $\mathbb{R}^2$ पर समाकलनीय होता है ।

2. (क) मूल-बिन्दु पर सांतत्य के लिए निम्नलिखित फलन की जाँच कीजिए : *3*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{यदि} \quad x^4 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{यदि} \quad x = 0 = y \end{cases}$$

(ख) यदि $z = \tan^{-1}\left(\dfrac{x^5 + y^5}{x^2 + y^2}\right)$, तब दिखाइए कि

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3 \sin z \cos z. \qquad 3$$

(ग) फलन $f(x, y, z) = 2x + y$ को प्रदेश W जो कि अर्धगोला $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x > 0$ है, समाकलित कीजिए । *4*

3. (क) $2x^2 - 3y^2 = 1$ पर फलन $f(x, y) = x^2 + y$ का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए । *5*

(ख) आयत $[0, 1] \times [0, 2]$ पर फलन $x\sqrt{4 - y^2}$ का द्विक समाकल परिकलित कीजिए । *3*

(ग) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + 3\cos x}{3x + 2\sin x}$ का मूल्यांकन कीजिए । *2*

4. (क) दो फलनों f और g के अंतर वाले फलन के ग्राफ के स्तर वक्रों को ज्ञात कीजिए जबकि $f(x, y) = 3x + 4y$ और $g(x, y) = x - y$. 2

(ख) दिखाइए कि निम्नलिखित रेखा समाकल पथ-स्वातंत्र्य है और इस तरह इसका मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_{(0,5)}^{(1,2)} (y^2 + 3x^2y)\,dx + (2xy + x^3)\,dy.$$ 5

(ग) (1, 0) पर अवकलनीयता के लिए फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|y|}, & y \neq 0 \\ x, & y = 0 \end{cases}$$

की जाँच कीजिए । 3

5. (क) दिखाइए कि

$$\{(x, y) \mid |x - 5| \leq 7 \text{ और } |y - 3| \leq 9\} \subseteq$$

$$\{(x, y) \mid (x - 1)^2 + (y - 2)^2 < 15^2\}$$ 3

(ख) पृष्ठ $z = x^2 + 2y$ के उस हिस्से का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो शीर्षों (0, 0), (1, 0) और (1, 1) वाले xy-समतल में त्रिकोणीय प्रदेश T के ऊपर स्थित है । 4

(ग) मान लीजिए $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 5$. क्या (1, 1) पर f का टेलर बहुपद $T_2(x, y)$, $f(x, y)$ के बराबर है ? 3

6. (क) यंग प्रमेय का कथन दीजिए । यंग प्रमेय से दिखाइए कि प्रत्येक बिन्दु (a, b) पर $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$, जहाँ f बहुपद फलन है । बहुपद

$$x^3 + 2x^2y + 5xy + 4x + 3y + 1$$

के लिए इस परिणाम को सत्यापित कीजिए । *4*

(ख) क्या निम्नलिखित फलनों के लिए शृंखला नियम लागू होता है ? जाँच कीजिए ।

$x = u^2 + v^2$, $y = u + v$, जहाँ $u = z + w$ और $v = 2zw$. *4*

(ग) निम्नलिखित फलनों के लिए fog और gof के अस्तित्व की जाँच कीजिए और यदि अस्तित्व है, तो उनका पता लगाइए :

$f(x, y, z) = (x, y, z)$; $g(x, y) = x \sin y$ *2*

7. (क) बिन्दु (1, 1) पर समीकरण $xy - 3x^2 + 2 = 0$ के लिए अस्पष्ट फलन प्रमेय सत्यापित कीजिए । *4*

(ख) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 7^x}{2x}$ का मूल्यांकन कीजिए । *3*

(ग) मान लीजिए $e = (1, 1, 0)$ और $f = (0, 1, -1)$ और $x = e + 2f$, $y = 2e - f$. तब $|x - y|$, $|2x + 3y|$ ज्ञात कीजिए और असमिका $|x - y| \leq |2x + 3y|$ की जाँच कीजिए । क्या यह सत्य है ? *3*