No. of Printed Pages : 8

MTE-02

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

03606

Term-End Examination

June, 2014

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Question no. 7 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from Q. No. 1 to Q. No. 6. Use of calculators is **not** allowed.*

---

1. (a) Show that $\mathbf{Q}[x]$, the set of all polynomials with rational coefficients is a vector space over $\mathbf{Q}$ with respect to addition of polynomials and multiplication by constant. Is the set of all polynomials with integer coefficients a subspace of this vector space ? Give reasons for your answer. *4*

(b) Find the range space and the kernel of the linear transformation : *6*

$$T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4,\ T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 + x_2,\ x_3 + x_4,\ 0)$$

2. (a) Show that if S and T are linear transformations on a finite dimensional vector space, then rank (ST) $\leq$ rank (T). Also give examples of linear transformations S and T for which rank (ST) $<$ rank (T). *4*

(b) Find the eigenvalues and eigenvectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Is A diagonalisable ? Justify your answer. *6*

3. (a) Find the dual basis for the basis $\{1, 1 + x, x^2 - 1\}$ of the vector space $P_3 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$. *4*

(b) Verify the Cayley – Hamilton theorem for

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$ Hence find its inverse. *4*

(c) Check whether the set

$$S = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_1 = 1 + a_2\}$$

is a subspace of $\mathbf{R}^n$ or not. *2*

4. (a) Check whether the quadratic forms $2x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 4xz - 6yz$ and $4x^2 + 3y^2 + z^2 - 6xy - 2xz$ are orthogonally equivalent. *4*

(b) Let $V = \{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \mid a + b = c\}$ and $W = \{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \mid a = b\}$ be subspaces of $\mathbf{R}^3$.

(i) Find the dimensions of V, W and $V \cap W$.

(ii) Is $\mathbf{R}^3 = V \oplus W$? Justify your answer. *4*

(c) Is the following matrix Hermitian ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 1-i \\ 0 & 1+i & 2 \end{bmatrix}$$

Is it unitary ? Justify your answer. *2*

5. (a) Let $V = \{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid a + b + c + d = 0\}$ and $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid a = -b, c = -d\}$ be subspaces of $\mathbf{R}^4$.

(i) Check that W is a subspace of V.

(ii) Find the dimension of V/W.

(iii) Check whether $(1, 1, 1, -3) + W$ and $(-1, 2, 0, -1) + W$ represent the same element of V/W. *5*

(b) Find an orthonormal basis for $\mathbf{C}^3$ by applying Gram – Schmidt orthogonalisation process to the basis

$\{(1, i, 0), (-i, 0, 2), (0, -i, 2)\}$. *5*

6. (a) Find the orthogonal canonical reduction of the quadratic form

$$9x^2 + 7y^2 + 11z^2 - 8xy + 8xz$$

and its principal axis. *6*

(b) Find the adjoint of the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hence, find its inverse. *4*

7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer either with a short proof or with a counter-example. *10*

(i) If W and U are subspaces of the vector space V having the same dimensions, then $U = W$.

(ii) If V is a vector space over K and $f : V \to K$ is a non-zero linear function, then f is onto.

(iii) A 3×3 matrix with real entries has a real eigenvalue.

(iv) If T is a linear transformation on an inner product space V and $T * T = 0$, then $T = 0$.

(v) The rank and signature of a quadratic form are always equal.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2014
ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*
(कुल का 70%)

***नोट :** प्रश्न सं. 7 करना ज़रूरी है । प्रश्न सं. 1 से 6 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । कैलकुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है ।*

---

1. (क) दिखाइए कि परिमेय गुणांकों वाले सभी बहुपदों का समुच्चय $\mathbf{Q}[x]$, बहुपदों के योग और अचर से गुणन के सापेक्ष $\mathbf{Q}$ पर एक सदिश समष्टि है । क्या पूर्णांक गुणांकों वाले सभी बहुपदों का समुच्चय इस सदिश समष्टि की उपसमष्टि है ? अपने उत्तर के कारण बताइए । *4*

(ख) रैखिक संकारक

$$T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4, T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ x_1 + x_2,\ x_3 + x_4,\ 0)$$

के परिसर समष्टि और अष्टि ज्ञात कीजिए । *6*

2. (क) यदि S और T एक परिमित विमीय सदिश समष्टि पर रैखिक संकारक हैं, तो दिखाइए कि जाति (ST) $\leq$ जाति (T) । उन रैखिक संकारकों S और T के उदाहरण भी दीजिए जिनके लिए जाति (ST) $<$ जाति (T) है । *4*

(ख) आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

के आइगेनमान और आइगेनसदिश ज्ञात कीजिए । क्या A विकर्णनीय है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । 6

3. (क) सदिश समष्टि

$P_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$ के आधार $\{1, 1 + x, x^2 - 1\}$ के द्वैत आधार ज्ञात कीजिए । 4

(ख) आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

के लिए कैली – हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित कीजिए । इससे आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए । 4

(ग) जाँच कीजिए कि समुच्चय

$S = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_1 = 1 + a_2\}$

$\mathbf{R}^n$ की उपसमष्टि है या नहीं । 2

4. (क) जाँच कीजिए कि द्विघाती समघात

$2x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 4xz - 6yz$ और

$4x^2 + 3y^2 + z^2 - 6xy - 2xz$

लांबिकतः तुल्य हैं या नहीं । 4

(ख) मान लीजिए कि

$V = \{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \mid a + b = c\}$ और

$W = \{(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \mid a = b\}$

$\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टियाँ हैं ।

(i) V, W और $V \cap W$ की विमाएँ ज्ञात कीजिए ।

(ii) क्या $\mathbf{R}^3 = V \oplus W$ है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *4*

(ग) क्या निम्नलिखित आव्यूह हर्मिटी है ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 1-i \\ 0 & 1+i & 2 \end{bmatrix}$$

क्या यह ऐकिक है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए । *2*

5. (क) मान लीजिए कि

$V = \{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid a + b + c + d = 0\}$ और

$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4 \mid a = -b, c = -d\}$

$\mathbf{R}^4$ की उपसमष्टियाँ हैं ।

(i) जाँच कीजिए कि W, V की उपसमष्टि है ।

(ii) V/W की विमा ज्ञात कीजिए ।

(iii) जाँच कीजिए कि $(1, 1, 1, -3) + W$ और $(-1, 2, 0, -1) + W$, V/W में एक ही अवयव को निरूपित करते हैं । *5*

(ख) आधार $\{(1, i, 0), (-i, 0, 2), (0, -i, 2)\}$ पर ग्राम – श्मिट लांबिकीकरण प्रक्रम का प्रयोग करके $\mathbf{C}^3$ के लिए एक प्रसामान्य लांबिक आधार ज्ञात कीजिए । *5*

6. (क) द्विघाती समघात

$$9x^2 + 7y^2 + 11z^2 - 8xy + 8xz$$

के लांबिक विहित समानयन और उसका मुख्य अक्ष ज्ञात कीजिए । 6

(ख) आव्यूह

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

का सहखंडज ज्ञात कीजिए । इससे इसका व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए । 4

7. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य और कौन-से असत्य हैं ? अपने उत्तर की एक लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए । 10

(i) यदि सदिश समष्टि V की उपसमष्टियों U और W की विमाएँ समान हों, तो U = W होता है ।

(ii) यदि V, K पर एक सदिश समष्टि है और $f : V \to K$ एक शून्येतर रैखिक फलन है, तो f आच्छादक है ।

(iii) वास्तविक प्रविष्टियों वाले 3×3 आव्यूह का एक वास्तविक आइगेनमान होता है ।

(iv) यदि T एक आंतर गुणन समष्टि V पर रैखिक संकारक है और $T^* T = 0$ है, तो $T = 0$.

(v) किसी भी द्विघाती समघात की जाति और चिह्नक सदैव बराबर होते हैं ।