

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

(BDP)

04547

Term-End Examination

June, 2014

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-01 : CALCULUS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

Note : Question no. 1 is **compulsory**. Attempt any **four** questions from Q. No. 2 to Q. No. 7. Use of calculators is **not allowed**.

1. Which of the following statements are true ?

Justify your answer.

2×5=10

(i) $|x - 2| < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5.$

(ii) $\frac{d}{dx} \int_x^0 \sin(t^2) dt = -\sin x^2.$

(iii) If f is continuous on $[-\pi, \pi]$, then

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

(iv) The function f defined by

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 5, \forall x \in \mathbf{R}$$

is an increasing function.

- (v) Rolle's theorem is applicable for the function
 $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ on $[-1, 1]$.

2. (a) If $y = e^{m \tan^{-1} x}$, check whether the equation

$$(1 + x^2) y_{n+1} + (2nx - m) y_n + n(n+1) y_{n-2} = 0$$

is true or not. Justify your answer. 4

- (b) Is the function $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2x & \text{if } x \leq 0 \\ 5x - 1 & \text{if } 0 < x \leq 1 \\ 4x^2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

continuous on \mathbf{R} ? Justify your answer. 4

- (c) Is the curve $r = 2 \sin 3\theta$ symmetric about the line $\theta = \pi/2$? Justify your answer. 2

3. (a) Obtain Maclaurin's series for $y = \sin 2x$, upto first three terms. 3

- (b) If $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx$, $n \geq 1$, show that

$$I_{n+1} - (n+1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^n = -n(n+1) I_{n-1}.$$

Also deduce the value of I_4 . 5

- (c) Differentiate $\sin^{-1} \left(\sqrt{1-x^2} \right)$ w.r.t. x ,
when $x \in]-1, 1[$. 2

4. Trace the following curve

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

where $a > 0$ and t varies from 0 to 2π ; clearly stating all the properties used in the process. 10

5. (a) Evaluate : 4

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)\sqrt{x+1}}$$

(b) Find the maximum and minimum values, if any, for the function

$$f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x + 6. \quad 4$$

(c) Find the domain of $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-3}}$. 2

6. (a) Evaluate : 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 - 3x - 5} \right]$$

(b) Prove that $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbf{R}$. 3

(c) Find the area of the loop of the curve,

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2). \quad 5$$

7. (a) Evaluate :

3

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos^n x} \, dx}{\sqrt{\cos^n x} + \sqrt{\sin^n x}}$$

(b) Calculate the approximate value of

$$\int_0^8 \frac{dx}{x+1} \text{ using Simpson's rule.} \quad 3$$

(c) Find the points of inflection of the curve, $y = x e^x$, $x \in \mathbf{R}$, if any. What is its radius of curvature at $x = 2$?

4

स्नातक उपाधि कार्यक्रम
(बी.डी.पी.)
सत्रांत परीक्षा
जून, 2014

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित
एम.टी.ई.-01 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50
(कुल का 70%)

नोट: प्रश्न सं. 1 करना ज़रूरी है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरो का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं ? अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। 2×5=10

(i) $|x - 2| < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5.$

(ii) $\frac{d}{dx} \int_x^0 \sin(t^2) dt = -\sin x^2.$

(iii) यदि $[-\pi, \pi]$ पर परिभाषित फलन f संतत है, तो

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

(iv) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 5, \forall x \in \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित फलन f एक वर्धमान फलन है।

(v) $[-1, 1]$ पर परिभाषित फलन $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ के लिए रोल प्रमेय का प्रयोग किया जा सकता है।

2. (क) यदि $y = e^{m \tan^{-1} x}$, तो जाँच कीजिए कि समीकरण

$$(1 + x^2) y_{n+1} + (2nx - m) y_n + n(n+1) y_{n-2} = 0$$

सत्य है या नहीं। अपने उत्तर का कारण दीजिए। 4

$$(ख) f(x) = \begin{cases} 1 + 2x & \text{यदि } x \leq 0 \\ 5x - 1 & \text{यदि } 0 < x \leq 1 \\ 4x^2 & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ क्या \mathbf{R} पर संतत है? अपने उत्तर का कारण दीजिए। 4

(ग) क्या वक्र $r = 2 \sin 3\theta$, रेखा $\theta = \pi/2$ के सापेक्ष सममित है? अपने उत्तर का कारण दीजिए। 2

3. (क) $y = \sin 2x$ की मैक्लॉरिन श्रेणी प्रथम तीन पदों तक ज्ञात कीजिए। 3

(ख) यदि $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x \, dx$, $n \geq 1$, तो दर्शाइए कि

$$I_{n+1} - (n+1) \left(\frac{\pi}{2}\right)^n = -n(n+1) I_{n-1}.$$

इस प्रकार I_4 का मान निकालिए। 5

(ग) $\sin^{-1}(\sqrt{1-x^2})$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिए जबकि $x \in]-1, 1[$. 2

4. निम्नलिखित वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$$x = a(t - \sin t),$$

$$y = a(1 - \cos t) \text{ जहाँ } a > 0 \text{ और}$$

t का मान 0 से 2π तक बदलता है। अनुरेखण करने के लिए इस्तेमाल किए गए सभी गुणधर्मों का स्पष्ट वर्णन कीजिए। 10

5. (क) $\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x+1}}$ का मूल्यांकन कीजिए। 4

(ख) फलन $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x + 6$ के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान (यदि है तो) ज्ञात कीजिए। 4

(ग) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-3}}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए। 2

6. (क) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 - 3x - 5} \right]$ का मूल्यांकन कीजिए। 2

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbf{R}. \quad 3$$

(ग) वक्र $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$ के पाश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

7. (क) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos^n x} dx}{\sqrt{\cos^n x} + \sqrt{\sin^n x}}$ का मूल्यांकन कीजिए । 3

(ख) सिम्पसन नियम का प्रयोग करके $\int_0^8 \frac{dx}{x+1}$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए । 3

(ग) वक्र $y = xe^x$, $x \in \mathbf{R}$ का नतिपरिवर्तन बिन्दु (यदि है) ज्ञात कीजिए । इसकी $x = 2$ पर वक्रता त्रिज्या क्या है ? 4