No. of Printed Pages : 8

PHE-14

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

June, 2013

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

---

1. Attempt *any five* parts : **2x5=10**

(a) Show that the matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ is both hermitian and unitary.

(b) Obtain the Laplace transform of $f(t) = t^2$.

(c) Obtian the Fourier transform of $f(x)$, where

$$f(x) = \begin{cases} c & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and c is a constant.

(d) Locate the singularities of the function :

$$f(z) = \frac{\log(z + 2i)}{z^2}$$

(e) For the Bessel function of the first kind of intergal order m given by :

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

show that $J_0(0) = 1$ and $J_m(0) = 0$ for $m \neq 0$.

(f) Define contravariant and covariant vectors.

(g) Rödrigues' formula for Hermite polynomials is :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Obtain $H_2(x)$.

(h) Show that the set of real numbers is not a group under multiplication.

2. Attempt *any two* parts : **5x2=10**

(a) Obtain the eigenvalues and the eigenvectors of the matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Show that the eignevectors are orthogonal.

(b) Show that the eigen values of a unitary matrix are complex numbers of unit modulus.

(c) With the help of a diagram, enumerate all the symmetries of an equilateral traingle.

3. Attempt *any two* parts : 5x2=10

(a) Evaluate the integral : $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$.

(b) Obtain the residue of the function : $f(z) = ze^{1/z}\, dz$ at $z = 0$.

(c) Obtain the analytic function whose real part is : $u(x, y) = e^x \cos y$.

4. Attempt *any two* parts : 5x2=10

(a) Determine the Fourier transform of :

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

(b) Obtain the inverse Laplace transform of :

$$F(S) = \frac{S}{(S - 1)^2 - 4}$$

(c) Obtain $L[f(t)]$ for $f(t) = t \cos \omega t$.

5. Attempt *any one* part : 10

(a) The generating function for the Legendre polynomials is :

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

Derive the recurrence relation : $(2n+1)\, xP_n(x) = nP_{n-1}(x) + (n+1)\, P_{n+1}(x)$ Using this relation show that

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right).$$

(b) Using the generating function for the Hermite polynomials $H_n(x)$,

$$g(x,t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}$$ derive

the relation $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 2^n n! \, \pi^{1/2} \, \delta_{nm}$$

Hence evaluate the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \, e^{-x^2} H_n(x) \, dx.$$

विज्ञान स्नातक (बी.एससी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2013

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : ***सभी*** *प्रश्न करें। प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।*

1. ***कोई पाँच*** भाग करें : **2x5=10**

(a) सिद्ध करें कि निम्नलिखित आव्यूह :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

हर्मिटी और ऐकिक है।

(b) फलन $f(t) = t^2$ का लाप्लसा रूपांतर प्राप्त करें।

(c) निम्नलिखित फलन $f(x)$ का फूरिये रूपांतर प्राप्त करें

जहाँ; $f(x) = \begin{cases} c & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$

और C एक स्थिरांक है।

(d) फलन : $f(z) = \dfrac{\log(z + 2i)}{z^2}$ की विचित्रताओं का निर्धारण करें।

(e) पूर्णांक कोटि m वाले प्रथम प्रकार के बेसल फलन :

$$J_m (x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma (m + k + 1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k + m}$$

के लिए सिद्ध करें कि $J_0(0)=1$ और $J_m (0)=0$ जब $m \neq 0$

(f) प्रतिपरिवर्ती और सहपरिवर्ती सदिशों की परिभाषा लिखें।

(g) हर्मिट बहुपदों का रोड्रिगेज़ सूत्र निम्नलिखित है :

$$H_n (x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

$H_2(x)$ प्राप्त करें।

(h) सिद्ध करें कि गुणन के अधीन वास्तविक संख्याओं का समुच्चय एक समूह नहीं है।

2. ***कोई दो*** भाग करें। **5x2=10**

(a) आव्यूह $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान और आइगेन सदिश प्राप्त करें। सिद्ध करें कि आइगेन सदिश लांबिक हैं।

(b) सिद्ध करें कि ऐकिक आव्यूह का प्रत्येक आइगेन मान एकक मापांक वाली सम्मिश्र संख्या होती है।

(c) चित्र की सहायता से समबाहु त्रिभुज की सभी सममितियाँ दिखाएँ।

3. ***कोई दो*** भाग करें। 5x2=10

(a) निम्नलिखित समाकल का परिकलन करें :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 4}.$$

(b) $z=0$ के प्रति फलन $f(z) = ze^{1/z}\,dz$ का अवशिष्ट प्राप्त करें।

(c) वह विश्लेषिक फलन प्राप्त करें जिसका वास्तविक भाग $u(x, y) = e^x \cos y$ है।

4. ***कोई दो*** भाग करें। 5x2=10

(a) फलन $f(x) = e^{-x^2}$ का फूरियर रुपांतर परिकलित करें।

(b) फलन $F(S) = \dfrac{S}{(S-1)^2 - 4}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर प्राप्त करें।

(c) फलन $f(t) = t \cos \omega t$ के लिए $L[f(t)]$ प्राप्त करें।

5. ***कोई एक*** भाग करें। 10

(a) लेजान्ड्रें बहुपदों का जनक फलन निम्नलिखित है :

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध व्युत्पन्न करें।

$$(2n+1)\, xP_n(x) = nP_{n-1}(x) + (n+1)\, P_{n+1}(x)$$

इस संबंध का उपयोग कर सिद्ध करें कि :

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right) \text{ है।}$$

(b) हर्मिट बहुपदों $H_n(x)$ के निम्नलिखित जनक फलन :

$$g(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) t^n}{n!}$$

का उपयोग कर निम्नलिखित संबंध व्युत्पन्न करें :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx$$
$$= 2^n n! \pi^{1/2} \delta_{nm}$$

और निम्न समाकल

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) dx$$

को परिकलित करें।