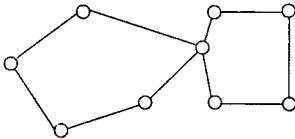


BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)**Term-End Examination****June, 2013****ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS****MTE-13 : DISCRETE MATHEMATICS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50**Weightage : 70%*

Note : Question No. 1 is *compulsory*. Do *any four* questions from question numbers 2 to 7. Calculators are *not allowed*.

1. Which of the following statements are *false* and 10 which are *true* ? Justify your answers with a short proof or a counter - example.

- (a) The following graph is non - Hamiltonian



- (b) If a coin is tossed 4 times, the probability of getting more heads than tails is $\frac{5}{16}$.
- (c) There is at least one graph with five vertices of degrees 2, 2, 2, 2, 3.
- (d) If $x, y, n \in \mathbb{N}$, the proposition $(\exists x) (\exists y) (x^2 + y^2 = n)$ is true.

- (e) The generating function of the recurrence relation, $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n$ is

$$\frac{e^{2x}}{(x-2)(x-3)}$$

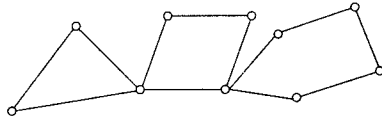
2. (a) Find the Boolean expression, in the DNF, for the function $f : B^3 \rightarrow B$ given by the following table. 4

(x_1, x_2, x_3)	$f(x_1, x_2, x_3)$
(1, 1, 1)	1
(1, 1, 0)	0
(1, 0, 0)	1
(1, 0, 1)	1
(0, 1, 1)	1
(0, 1, 0)	1
(0, 0, 1)	0
(0, 0, 0)	1

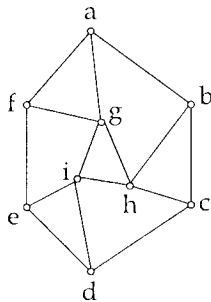
- (b) In how many ways can 5 boys and 3 girls be seated around a table if boy B_1 and girl G_1 are not adjacent? 3
- (c) Prove that a bipartite graph cannot contain odd cycles. 3
3. (a) For $n \in \mathbb{N}$, prove that 3
- $$C(n, 0)^2 + C(n, 1)^2 + \dots + C(n, n)^2 = C(2n, n)$$

- (b) Suppose we want to find the smallest and largest numbers in a set of n distinct integers, where n is even, using the divide and conquer approach. Find a recurrence relation to count the number of comparisons required. 4
- (c) If a k - regular graph has no cycles of length less than 5, show that it must have at least $k^2 + 1$ vertices. 3
4. (a) How many solutions are there to the equation $x + y + z + w = 18$ in positive integers such that $x \leq 5$, $y \leq 7$, $z \leq 8$, $w \leq 10$? 5
- (b) Two unbiased dice are thrown. Find the probability that the number on the 1st die is greater than that on the 2nd die. 2
- (c) Give an indirect proof of the following statement : 3
 "If $x.y$ is even, then one of x or y must be even".
5. (a) Calculate the Stirling number S_4^2 . 3
- (b) Find the generating function for the recurrence relation. 4
 $a_k = 4a_{k-1} - 4a_{k-2} + 1$, given that $a_0 = 2$,
 $a_1 = 5$.
- (c) Show that any tree with exactly two vertices of degree 1 is a path. 3

6. (a) Using Mathematical induction, prove that the sum of the first n odd, positive integers is n^2 for all $n \in \mathbb{N}$. 3
- (b) Illustrate Fleury's Algorithm with the help of the following graph. Indicate the bridges you have chosen. 4



- (c) Solve the recurrence relation $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, $a_0 = a_1 = 1$. 3
7. (a) Consider the following graph : 5



- (i) Find its edge chromatic number.
- (ii) Find its vertex chromatic number.
- (b) A, B and C are standing in a line. The first person says that C is in the middle, the second says that she is B and the third says that A is in the middle. If you know that A is telling the truth and C is telling a lie, use deductive reasoning to find out their placement in the line. 3
- (c) If $d_{n,k}$ denotes the number of permutations of n numbers with k matches (i.e. exactly k of the numbers appear in their natural position), show that $d_{n,k} = C(n,k) d_{n-k}$ 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2013

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-13 : विविक्त गणित

समय : 2 घण्टे

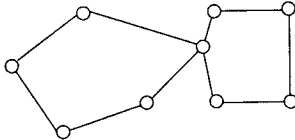
अधिकतम अंक : 50

कुल का: 70%

नोट : प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। प्रश्न सं. 2 से 7 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटरो का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।

1. बताइए निम्नलिखित में से कौन कथन **सत्य** हैं और कौन से **10 असत्य** हैं? लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण से अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए।

- (a) निम्नलिखित ग्राफ अहैमिलटोनीय है।



- (b) यदि एक सिक्के को 4 बार उछाला जाता है तो पट्ट की तुलना में ज्यादा चित्त आने की प्रायिकता $\frac{5}{16}$ है।
- (c) कम से कम एक ऐसा पाँच शीर्ष वाला ग्राफ होता है जिसके शीर्षों की कोटियाँ 2, 2, 2, 2, 3 होती हैं।
- (d) यदि $x, y, n \in \mathbb{N}$, तब कथन $(\exists x) (\exists y) (x^2 + y^2 = n)$ सत्य है।

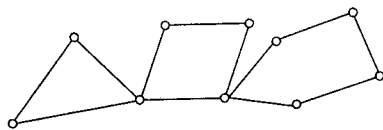
- (e) पुनरावृत्ति संबंध $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n$ का जनक फलन $\frac{e^{2x}}{(x-2)(x-3)}$ है।

2. (a) निम्नलिखित सारणी द्वारा दिए गए फलन $f : B^3 \rightarrow B$ के लिए DNF में बुलीय व्यंजक ज्ञात कीजिए। 4

(x_1, x_2, x_3)	$f(x_1, x_2, x_3)$
(1, 1, 1)	1
(1, 1, 0)	0
(1, 0, 0)	1
(1, 0, 1)	1
(0, 1, 1)	1
(0, 1, 0)	1
(0, 0, 1)	0
(0, 0, 0)	1

- (b) 5 लड़कों और 3 लड़कियों को एक मेज के चारों ओर कितने तरीकों से बिठाया जा सकता है, यदि लड़का B_1 और लड़की G_1 संलग्न नहीं है? 3
- (c) सिद्ध कीजिए कि द्विभाजित ग्राफ में विषम चक्र नहीं होते। 3
3. (a) $n \in \mathbb{N}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि : 3
 $C(n, 0)^2 + C(n, 1)^2 + \dots + C(n, n)^2 = C(2n, n)$
- (b) मान लीजिए फूट डालो और जीतो विधि से हम n अलग-अलग पूर्णाकों के समुच्चय में लघुत्तम और वृहत्तम संख्याएँ ज्ञात करना चाहते हैं, जहाँ n सम है। अपेक्षित तुलनाओं की संख्या की गणना करने के लिए पुनरावृत्ति संबंध ज्ञात कीजिए। 4

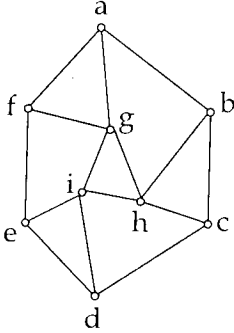
- (c) यदि k - नियमित ग्राफ में 5 से कम लंबाई वाला कोई चक्र नहीं है, दिखाइए कि इसके कम से कम $k^2 + 1$ शीर्ष अवश्य होने चाहिए। 3
4. (a) समीकरण $x + y + z + w = 18$ के घनात्मक पूर्णाकों में ऐसे कितने हल हैं जिनके लिए $x \leq 5, y \leq 7, z \leq 8, w \leq 10$? 5
- (b) दो अनभिन्न पाँसों को फेंका जाता है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पहले पाँसे की संख्या दूसरे पाँसे पर आने वाली संख्या से बड़ी होगी। 2
- (c) निम्नलिखित कथन की परोक्ष उपपत्ति दीजिए : 3
 “यदि x, y सम है, तब x या y में से एक सम होगा।”
5. (a) स्टर्लिंग संख्या S_4^2 परिकलित कीजिए। 3
- (b) पुनरावृत्ति संबंध $a_k = 4a_{k-1} - 4a_{k-2} + 1$, का जनक फलन ज्ञात कीजिए जहाँ $a_0 = 2, a_1 = 5$ । 4
- (c) दिखाइए कि कोटि 1 के ठीक-ठीक दो शीर्षों वाला कोई भी वृक्ष एक पथ है। 3
6. (a) गणितीय आगमन द्वारा सिद्ध कीजिए कि प्रथम n विषम, घनात्मक पूर्णाकों का योग सभी $n \in \mathbb{N}$ के लिए n^2 है। 3
- (b) निम्नलिखित ग्राफ की सहायता से फ्लूरी कलन-विधि को समझाइए। आपने जिन सेतुओं को चुना है वे भी बताइए। 4



- (c) पुनरावृत्ति संबंध : 3
 $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}, a_0 = a_1 = 1$ को हल कीजिए।

7. (a) निम्नलिखित ग्राफ लिजिए :

5



(i) इसकी कोर वर्णिक संख्या ज्ञात कीजिए।

(ii) इसकी शीर्ष वर्णिक संख्या ज्ञात कीजिए।

(b) A, B और C एक पंक्ति में खड़े हैं। पहला व्यक्ति कहता है कि C बीच में है दूसरा कहती है कि वह B है और तीसरा कहता है कि A बीच में है। यदि आप जानते हैं कि A सच कह रहा है और C झूठ बोल रहा है तो पंक्ति में उनके स्थान-निर्धारण के लिए निगमनिक तर्क का प्रयोग कीजिए।

(c) यदि $d_{n,k}$ k मेल खाने वाली n संख्याओं के क्रमचयों की संख्या है (अर्थात जिनमें ठीक-ठीक k अंकित वस्तुएँ अपनी प्राकृतिक स्थिति में उपस्थित होती हैं), तब दिखाइए कि $d_{n,k} = C(n, k) d_{n-k}$