

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2013

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-11 : PROBABILITY AND STATISTICS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

Weightage : 70%

Note : Question No. 7 is compulsory. Answer any four questions from question no. 1 to 6. Calculators are not allowed.

- 01728
1. (a) The first three moments of a distribution about the value 2 are 1, 16 and -40 respectively. Examine the Skewness of the distribution. 3
- (b) Find the maximum likelihood estimator for the parameter λ of the Poisson distribution on the basis of a sample of size n . Also, find its variance. 4
- (c) If x has an exponential distribution with parameter θ . Find the density function of $\log_e x$. 3
2. (a) If $x \sim n(\mu, \sigma^2)$. Find the moment generating function of $x - c$ where c is a constant. 3

- (b) Let p be the probability that a coin will fall head in a single toss in order to test 5
 $H_0 : p = \frac{1}{2}$ against $H_1 : p = \frac{3}{4}$. The coin is tossed 3 times and H_0 is rejected if more than 2 heads are obtained. Find the probability of type I and type II errors. Also obtain the power of the test.
- (c) An unbiased die is rolled twice. Let A_1 2
denote the event : odd face roll on the first die, A_2 denote the event that total score is Odd. Check the independence of A_1 and A_2 .
3. (a) Let $f(x, y) = x + y ; 0 < x < 1, 0 < y < 1$ 6
Find (i) the correlation coefficient between x and y , and
(ii) $E(y/x)$.
- (b) Show that variance can be expressed in 4
terms of the mutual differences $x_i - x_j$ of the observations i.e.

$$S^2 = \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

4. (a) The joint probability distribution of x and y is given below : 4

$x \rightarrow$	0	1	2	
$y \downarrow$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{40}$	
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{20}$	-	
3	$\frac{1}{120}$	-	$\frac{1}{120}$	

- Find (i) $P(x=1, y=2)$
(ii) $P(x=0, 1 \leq y < 3)$
(iii) $P(x+y \leq 1)$
(iv) $P(x > y)$
- (b) Every clinical thermometer is classified into one of the four categories A, B, C and D on the basis of inspection and test. From the past experience it is known that thermometers produced by a certain manufacturer are distributed among the four categories in the following proportions : 6

Category :	A	B	C	D
Proportion :	0.87	0.09	0.03	0.01

A new lot of 1336 thermometers is submitted by the manufacture for inspection and test and the following distribution of categories obtained :

Category :	A	B	C	D
No. of thermometers Reported :	1188	91	47	10

At 5% level of significance test whether this new lot of thermometers differ from the previous experience.

You may like to use the following values

$$\left(\chi_{0.05,3}^2 = 7.815, \chi_{0.05,4}^2 = 9.488, \chi_{0.05,5}^2 = 11.070 \right)$$

5. (a) The following information about advertising expenditures and sales of a company is given below : 6

	Advertising expenditure (x) Lakhs (Rs)	Sales (y) Lakhs (Rs)
Average	10	90
Variance	9	144
Correlation Coefficient between x and y is 0.8		

What should be the advertising budget if the company wants to attain sales target of Rs. 120 Lakhs ?

- (b) The police plans to enforce speed limits by using radar traps at 4 different locations within the city. The radar traps at each of the locations L_1, L_2, L_3 and L_4 are operated 40%, 30%, 20% and 30% of time. If a person who is speeding on his way to work has 4

probabilities of 0.2, 0.1, 0.5 and 0.2 respectively of passing through these locations. What is the probability that the person will receive a speeding challan.

6. (a) Find the mean and standard deviation for the following data : 5

Class Interval	Frequency
0 - 10	5
10 - 20	10
20 - 30	24
30 - 40	15
40 - 50	6

- (b) State Chebychev's inequality. Hence obtain the lower bound for $P[-1 < x < 9]$ if the $E(x)$ and $E(x^2)$ of x are 4 and 20 respectively. 5

7. Which of the following statements are *true* or *false*? Give reasons for your answer. $5 \times 2 = 10$

- (a) If $y = a x - b$, then the correlation coefficient between x and y does not exist and if it exists it is equal to zero.
- (b) For a normal distribution mean, median and standard deviation are all equal.
- (c) If $x \geq y$ then $y - x$ assume only non positive values and hence $E(x) \leq E(y)$.

- (d) If two unbiased dice are rolled, then the probability of their same score being 6 is $\frac{1}{6}$.
- (e) If the random variable x follows a normal distribution with known mean μ and unknown variance σ^2 then $\frac{x - \mu}{\sigma}$ is a statistic but $(x - \mu)$ is not.
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2013

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-11 : प्रायिकता और सांख्यिकी

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

भारिता : 70%

नोट : प्रश्न संख्या 7 करना अनिवार्य है। प्रश्न संख्या 1 से 6 में से कोई चार प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (a) एक बंटन के 2 के सापेक्ष पहले तीन आघूर्ण क्रमशः 1, 3
16 और -40 हैं। बंटन की वैषम्य परिकलित कीजिए।
- (b) n आमाप के प्रतिदर्श वाले प्वासां बंटन के प्राचल λ का 4
अधिकतम संभावित आकलन ज्ञात कीजिए। इसका
प्रसरण भी ज्ञात कीजिए।
- (c) यदि x , प्राचल θ वाला चरघातांकी बंटन है तो $\log_e x$ का 3
घनत्व फलन ज्ञात कीजिए।
2. (a) यदि $x \sim n(\mu, \sigma^2)$ है तो $x - c$ का आघूर्ण जनक फलन 3
ज्ञात कीजिए जहाँ c एक अचर है।

- (b) $H_0 : p = \frac{1}{2}$ प्रतिकूल $H_1 : p = \frac{3}{4}$ का परीक्षण करने 5
के लिए मान लीजिए कि एक सिक्के को एक बार उछाले जाने पर उस पर चित आने की प्रायिकता p है। सिक्के को 3 बार उछाला जाता है तथा H_0 को अस्वीकार कर दिया जाता है, यदि 2 से अधिक 'चित' प्राप्त होते हैं। इस परीक्षण की प्रकार I और प्रकार II की त्रुटियों की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। परीक्षण की क्षमता भी ज्ञात कीजिए।
- (c) एक अनभिन्नत पासे को दो बार फेंका जाता है। मान 2
लीजिए A_1 वह घटना है कि पहले पासे पर विषम फलन आता है और A_2 वह घटना है कि कुल स्कोर विषम है। A_1 और A_2 की स्वातन्त्र्यता की जाँच कीजिए।
3. (a) मान लीजिए $f(x, y) = x + y; 0 < x < 1, 0 < y < 1$ 6
(i) x और y के बीच सहसंबंध गुणांक और
(ii) $E(y/x)$ ज्ञात कीजिए।
- (b) दर्शाइए कि विचरण को प्रेक्षणों के पारस्परिक अन्तर 4
 $x_i - x_j$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जो कि
- $$S^2 = \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

4. (a) x और y का संयुक्त प्रायिकता बंटन इस प्रकार है।

4

$x \rightarrow$				
	$y \downarrow$	0	1	2
0		$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$
1		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{40}$
2		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{20}$	-
3		$\frac{1}{120}$	-	$\frac{1}{120}$

निम्नलिखित ज्ञात कीजिए।

- (i) $P(x=1, y=2)$
- (ii) $P(x=0, 1 \leq y < 3)$
- (iii) $P(x+y \leq 1)$
- (iv) $P(x > y)$

- (b) प्रत्येक क्लीनिक के थर्मामीटर को निरीक्षण और परीक्षण के आधार पर चार वर्गों A, B, C और D में से किसी एक वर्ग में वर्गीकृत किया जाता है। पिछले अनुभव के आधार पर किसी एक निर्माता द्वारा बनाये गये थर्मामीटरों का चारों वर्गों में बंटन का अनुपात निम्नलिखित है।

वर्ग :	A	B	C	D
अनुपात :	0.87	0.09	0.03	0.01

निर्माता द्वारा 1336 थर्मामीटरों का एक नया लॉट निरीक्षण के लिए आता है जिसके वर्गों का बंटन निम्नलिखित है।

6

वर्ग :	A	B	C	D
थर्मामीटरों की संख्या :	1188	91	47	10

5% सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए कि नये लॉट के थर्मामीटरों के वर्गीकरण और पिछले अनुभव के थर्मामीटरों के वर्गीकरण में अन्तर है।

आप निम्न मानों का प्रयोग कर सकते हैं :

$$(\chi_{0.05,3}^2=7.815, \chi_{0.05,4}^2=9.488, \chi_{0.05,5}^2=11.070)$$

5. (a) एक कम्पनी के विज्ञापनों में खर्चे और बिक्री की सूचना निम्नलिखित है। 6

	विज्ञापन में खर्चे (x) (लाख रु. में)	बिक्री (y) (लाख रु. में)
माध्य	10	90
प्रसरण	9	144
x और y के बीच सहसंबंध गुणांक 0.8 है।		

यदि कम्पनी का बिक्री लक्ष्य रु. 120 लाख है तो विज्ञापन में कितना खर्चा होना चाहिए ?

- (b) पुलिस गति नियंत्रण के लिए एक शहर में 4 भिन्न-भिन्न 4
स्थानों पर रडार ट्रेप लगाती है। प्रत्येक स्थान L_1, L_2, L_3 और L_4 पर रडार ट्रेप 40%, 30%, 20% और 30% समय तक काम करते हैं! एक व्यक्ति के अपने काम

पर जाते समय इन स्थानों से गुजरने की प्रायिकता क्रमशः 0.2, 0.1, 0.5 और 0.2 है। वह प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि उस व्यक्ति का अधिक गति के लिए चालान किया जाएगा।

6. (a) निम्नलिखित आकड़ों के लिए माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए। 5

वर्ग अन्तराल	बारंबारता
0 - 10	5
10 - 20	10
20 - 30	24
30 - 40	15
40 - 50	6

- (b) शेबीशेव की असमिका का कथन दीजिए। इसका प्रयोग करके $P[-1 < x < 9]$ का निम्न परिबंध प्राप्त कीजिए यदि x का $E(x)$ और $E(x^2)$ क्रमशः 4 और 20 हैं। 5

7. निम्नलिखित में से कौन से कथन **सत्य** या **असत्य** हैं? अपने उत्तरों के कारण दीजिए। $5 \times 2 = 10$

- (a) यदि $y = a x - b$ है तो x और y के बीच सहसंबंध गुणांक का अस्तित्व नहीं होता है यदि अस्तित्व होता है तो यह शून्य होगा।
- (b) एक प्रासामान्य बंटन के माध्य, माध्यिका और मानक विचलन समान होते हैं।

- (c) यदि $x \geq y$ है तो $y - x$ का मान हमेशा धनोत्तर होगा और $E(x) \leq E(y)$.
- (d) यदि दो अनभिन्नत पासों को फेंका जाता है, तो दोनों के समान स्कोर 6 आने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ होगी।
- (e) यदि ज्ञात माध्य μ और अज्ञात प्रसरण σ^2 वाला एक यादृच्छिक चर x प्रासामान्य बँटित है तब $\frac{x - \mu}{\sigma}$ एक सांख्यिकीय है लेकिन $x - \mu$ सांख्यिकीय नहीं है।
-