No. of Printed Pages : **11** **MTE-10**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2013

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*
(Weightage 70%)

Note : *Answer **any five** questions. All computation may be done upto 3 decimal places. Use of calculator is **not** allowed.*

00584

1. (a) Find an interval of unit length which contains the smallest negative root in magnitude of the equation. **3**

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 5 = 0.$

Using end points of this interval as initial approximations, perform 2 iterations of the Regula - Falsi method.

(b) Evaluate the integral **5**

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{1 + 2x}$$

Using Simpson's rule with 2 and 4 sub intervals. Obtain the improved value using Romberg integration.

(c) Using Lagrange interpolation and the data. 2

x	-1	2	3
$f(x)$	-1	11	31

Obtain the approximate value of $f(0)$.

2. (a) Perform 3 iterations of the Gauss - Jacobi iteration method to solve the system of equations. 5

$6x+y+2z=6$

$x+4y+3z=-4$

$2x+y+8z=8$

Take the initial approximation as

$x^{(0)}=1.3,\ y^{(0)}=-1.9,\ z^{(0)}=0.8.$

(b) Find the approximate value of $y(2.4)$ for the initial value problem 5

$y^1=x(y-x),\ y(2)=3$

Using the Classical fourth order Runge - kutta method with $h=0.2$.

3. (a) Prove that 4

(i) $\sum\limits_{k=0}^{n} \Delta^2 f_k = \Delta f_{n+1} - \Delta f_0$

(ii) $hD = 2\sinh^{-1}(\delta/2)$

Where Δ is the forward difference operator, δ is central difference operator and D is the derivative operator.

(b) Set up the Gauss -Seidel iteration scheme in matrix form to solve the system of equations. **6**

$4x + 2z = 6$

$5y + 2z = -3$

$5x + 4y + 10z = 11.$

Find the rate of convergence of the iteration scheme, if it converges.

4. (a) Find the approximate value of $y(1.3)$ for the initial value problem. **4**

$y^1 = 1 + xy, \ y(1) = 1$

using Euler's method with $h = 0.1$.

(b) Find the inverse of the matrix **4**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Using Gauss - Jordan method.

(c) Using the Newton - Raphson method obtain the root of the equation **2**

$f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$

Correct to 2 decimal places. Take the initial approximation as $x_0 = 0$.

5. (a) Find the smallest eigen value in magnitude of the matrix 5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Using inverse power method. Take the initial approximation to the eigenvector as $v^{(0)} = [1\ 1\ 1]^T$. Perform 3 iterations.

(b) For the data 5

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$	-139	-21	1	23	141

Obtain $f'(x)$ using Newton's Forward interpolation method.

6. (a) For the method 5

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_0) - 2f(x_0+h) + f(x_0+2h)\right]$$

Find the optimal value of the step size h, so that

$|\text{truncation error}| = |\text{round} - \text{off error}|$.

(b) The iteration method 5

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}\left[6x_n + \frac{3N}{x_n} - \frac{x_n^3}{N}\right],\ n = 0, 1, \ldots\ldots$$

Where N is a positive constant, converge to some quantity..Determine the quantity. Also find the rate of convergence of this method.

7. (a) Find the internal of unit length which contains the smallest positive root of the equation $x^3 - 2x - 10 = 0$. Using the mid-point of this internal as initial approximation, perform two iterations of the Birge - Vieta method. 6

(b) Using Stirling's formula, find the value of $f(1.35)$ from the following table of values. 4

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	-0.87	-0.68	-0.43	-0.12	0.25

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बीडीपी)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2013

ऐच्छिक पाठ्‌याक्रम : गणित

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : ***कोई पाँच*** *प्रश्न हल कीजिए। सभी अभिकलन तीन दशमलव स्थानों तक निकटित कर सकते हैं। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *है।*

---

1. (a) एकक लंबाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जो समीकरण $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 5 = 0$ के सबसे छोटे ऋणात्मक मूल को अंतर्विष्ट करता है। इस अंतराल के अन्त्य बिंदुओं को आदि सन्निकटन मान कर मिथ्या स्थिति विधि की तीन पुनरावृतियाँ कीजिए। 3

(b) 2 और 4 उप-अंतराल लेकर समाकलन के सीम्प्सन नियम द्वारा : 5

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{1 + 2x}$$

का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। राम्बर्ग समाकलन द्वारा प्राप्त परिणाम में सुधार कीजिए।

(c) लंग्राज अंतर्वेशन और निम्नलिखित आँकड़ों का प्रयोग करके $f(0)$ का सन्निकट मान प्राप्त कीजिए। 2

x	-1	2	3
$f(x)$	-1	11	31

2. (a) समीकरण निकाय : 5

$$6x + y + 2z = 6$$

$$x + 4y + 3z = -4$$

$$2x + y + 8z = 8$$

को हल करने के लिए गाउस-जैकोबी पुनरावृत्ति विधि की तीन पुनरावृत्तियाँ कीजिए। आरंभिक सन्निकटन को $x^{(0)} = 1.3,\ y^{(0)} = -1.9,\ z^{(0)} = 0.8$ लेकर चलिए।

(b) $h = 0.2$ लेकर चतुर्थ कोटि चिरप्रतिष्ठित रुंगे-कुट्टा विधि द्वारा आदि मान समस्या $y^1 = x(y - x),\ y(2) = 3$ के लिए $y\ (2.4)$ का सन्निकट मान प्राप्त कीजिए। 5

3. (a) सिद्ध कीजिए कि : 4

(i) $$\sum_{k=0}^{n} \Delta^2 f_k = \Delta f_{n+1} - \Delta f_0$$

(ii) $\mathrm{hD} = 2\sinh^{-1}(\delta/2)$

जहाँ Δ अग्रातंर अतंर संकारक, δ , केन्द्रीय अंतर संकारक और D , अवकल संकारक हैं।

(b) समीकरण निकाय : 6

$4x + 2z = 6$

$5y + 2z = -3$

$5x + 4y + 10z = 11.$

को हल करने के लिए आव्यूह रूप में गाउस-सीडल पुनरावृत्ति योजना स्थापित कीजिए। पुनरावृत्ति योजना यदि अभिसारित है तो इसकी अभिसरण दर ज्ञात कीजिए।

4. (a) h = 0.1 लेकर ऑयलर विधि द्वारा आदि मान समस्या $y^1 = 1 + xy$, $y(1) = 1$ के लिए $y(1.3)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। 4

(b) गाउस-जॉर्डन विधि से आव्यूह : 4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

(c) न्यूटन-रैफ्सन विधि द्वारा समीकरण $f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$ का मूल, दो दशमलव स्थानों तक शुद्ध, प्राप्त कीजिए। आदि सन्निकटन $x_0 = 0$ लेकर चलिए। 2

5. (a) प्रतिलोम घात विधि की तीन पुनरावृत्तियों का प्रयोग करके आव्यूह 5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

का परिमाण में लघुतम आइगनमान ज्ञात कीजिए। सन्निकटित आरंभिक आइगनसदिश को $v^{(0)} = [1\ 1\ 1]^T$ लेकर चलिए।

(b) आँकड़ों : 5

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$	-139	-21	1	23	141

के लिए न्यूटन की अग्रांतर अंतर्वेशन विधि द्वारा $f'(x)$ ज्ञात कीजिए।

6. (a) विधि : 5

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_0) - 2f(x_0+h) + f(x_0+2h)\right]$$

के लिए सोपान लंबाई h का इष्टतम मान ज्ञात कीजिए जिससे कि

| खंडन - त्रुटि | = | निकटन त्रुटि |

(b) पुनरावृत्ति विधि : 5

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}\left[6x_n + \frac{3N}{x_n} - \frac{x_n^3}{N}\right], n = 0, 1, ...$$

जहाँ N एक धन अचर है, एक परिमाण की ओर अभिसरित होती है। यह परिमाण ज्ञात कीजिए। इस विधि की अभिसरण दर भी ज्ञात कीजिए।

7. (a) एकक लंबाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जो समीकरण $x^3 - 2x - 10 = 0$ के सबसे छोटे धनात्मक मूल को अंतर्विष्ट करता हो। इस अंतराल के मध्य बिंदु को आदि सन्निकटन मानकर, बर्ज-विएटा विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। 6

(b) स्टर्लिंग सूत्र द्वारा निम्नलिखित तालिका मान से $f(1.35)$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	-0.87	-0.68	-0.43	-0.12	0.25