00257

# BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

## Term-End Examination

## June, 2013

## ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

## MTE-08 : DIFFERENTIAL EQUATIONS

*Time : 2 hours* *Maximum Marks : 50*

*(Weightage 70%)*

---

***Note :*** *Q. No. 1 is* ***compulsory.*** *Attempt* ***any four*** *questions out of the remaining questions No.s* **2-7.** *Calculators are* ***not*** *allowed.*

---

**1.** State whether the following statements are **true** or **false**. Justify your answer either, with the help of a short proof, or by a counter example **5x2=10**

(a) The differential equation of the family $F$ of curves, so that the slope of the tangent at any point of any curve of the family $F$ is equal to the square of the abscissa of the point is

$$\frac{dy}{dx} = x^2.$$

(b) The differential equation

$$\left(1 + 2e^{x/y}\right) + 2e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

cannot be transformed to a differential equation with variables separable.

(c) The integral curves of

$$\frac{a\,dx}{(b-c)yz} = \frac{b\,dy}{(c-a)zx} = \frac{c\,dz}{(a-b)xy}$$

are the intersections of the conicoids

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = c_1,$$

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = c_2,$$

($c_1$, $c_2$ : parameters).

(d) The complementary function for the differential equation given in symbolic form as $(DD^1 + D - D^1 - 1)z = xy$ is

$e^{-y}f(x) + e^{x}g(y)$.

(e) The partial differential equation

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

is elliptic if $xy<1$.

2. (a) Solve : $x\frac{dy}{dx} = 2y + x^3e^x, y(1) = 0$. 3

(b) Find the orthogonal trajectories of the family of ellipses 3

$x^2 + 2y^2 = C$ (C : parameter).

(c) Find the integral surface of the partial differential equation 4

$(x-y)y^2p + (y-x)x^2q = (x^2+y^2)z$

through the curve $xz = a^2$, $y = 0$.

3. (a) Solve, for $x > -2$, 3

$$(x+2)^2\frac{d^2y}{dx^2} - (x+2)\frac{dy}{dx} + y = 3x + 4$$

(b) Solve the following differential equation 3

$ydx - xdy + (1+x^2)dx + x^2 \sin y\, dy = 0$.

(c) A certain population is growing at a rate given by the equation. 4

$\frac{dx}{dt} = x(a - bx)$, a, b are positive constants,

Show that the maximum, rate of growth occurs when the population is equal to half the equilibrium size, i.e., when the population is $\left(\frac{a}{2b}\right)$.

4. (a) Solve the following differential equation, using method of change of dependent variable : 4

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)xy = x^2e^x.$$

(b) Using the method of separation of variables solve : 3

$u_{xt} = e^{-t}\cos x$

When $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = 0$

(c) Solve : 3

$$\sqrt{p} - \sqrt{q} + 3x = 0$$

5. (a) Solve : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x - y$. 3

(b) Write the ordinary differential equation 3

$y dx + (xy + x - 3y)dy = 0$ in the linear form, and hence find its solution.

(c) Use the method of variation of parameters to solve the equation. 4

$(D^2 - 2D)y = e^x \sin x$.

6. (a) Write down Charpit's equation for $x(1+q)p=(y+z)q$ and obtain a solution corresponding to the pair that involves only q and $x$. 3

(b) Solve : $y+px-x^4p^2=0$. 3

(c) Solve : 4

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}-6\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=y\cos x.$$

7. (a) Solve the wave equation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 7

under the following conditions :

$u=0$ when $x=0$ and $x=\pi$

$\frac{\partial u}{\partial t}=0$ when $t=0$ and $u(x,\ 0)=x\ \forall\ x$

satisfying $0<x<\pi$.

(b) Solve the equation $(D^2-1)y=x^2\cos x$. 3

एम.टी.ई.-08

# स्नातक उपाधि कार्यक्रम

## सत्रांत परीक्षा

## जून, 2013

## ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

## एम.टी.ई.-08 : अवकल समीकरण

*समय : 2 घण्टे* *अधिकतम अंक : 50*

*(कुल का : 70%)*

---

***नोट :*** *प्रश्न सं. 1* ***अनिवार्य*** *है। शेष प्रश्न 2 से 7 में से* ***किन्हीं चार*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति* ***नहीं*** *है।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन **सत्य** है या **असत्य**, उपपत्ति या प्रति-उदाहरण की सहायता से अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5x2=10

   (a) यदि किसी वक्र-कुल $F$, जिसके किसी भी वक्र के किसी भी बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिंदु के भुज के वर्ग के बराबर हो, तो उसका अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = x^2$ होगा।

   (b) अवकल समीकरण

   $$\left(1 + 2e^{x/y}\right) + 2e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$ को चर पृथक्करणीय रूप के समीकरण में रूपान्तरित नहीं किया जा सकता।

(c) समीकरण $\frac{adx}{(b-c)yz} = \frac{bdy}{(c-a)zx} = \frac{cdz}{(a-b)xy}$

के समाकल वक्र, शांकवजों

$ax^2 + by^2 + cz^2 = c_1$,

$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = c_2$,

जहाँ $c_1$, $c_2$ प्राचल हैं, के प्रतिच्छेद होते हैं।

(d) $(DD^1 + D - D^1 - 1)z = xy$ के प्रतीकात्मक रूप में दिए गए अवकल समीकरण का पूरक फलन $e^{-y}f(x) + e^x g(y)$ है।

(e) आंशिक अवकल समीकरण

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

दीर्घवृतीय होता है, यदि $xy < 1$.

2. (a) हल कीजिए : $x\frac{dy}{dx} = 2y + x^3e^x, y(1) = 0$. 3

(b) दीर्घवृत्त कुल $x^2 + 2y^2 = C$ (C एक प्राचल है) की लंबकोणीय संछेदी ज्ञात कीजिए। 3

(c) आंशिक अवकल समीकरण 4

$(x-y)y^2p + (y-x)x^2q = (x^2+y^2)z$ का

समाकल पृष्ठ मालूम कीजिए जो वक्र $xz = a^2$, $y = 0$ से होकर जाता है।

3. (a) $x > -2$ के लिए हल कीजिए : 3

$$(x+2)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - (x+2)\frac{dy}{dx} + y = 3x + 4.$$

(b) निम्नलिखित अवकल समीकरण का हल प्राप्त कीजिए : 3

$ydx - xdy + (1+x^2)dx + x^2 \sin y \, dy = 0$

(c) एक जनसंख्या में वृद्धि हो रही है जिसकी दर समीकरण 4

$\frac{dx}{dt} = x(a - bx)$, जहाँ a और b धनात्मक अचर हैं,

द्वारा प्राप्त है। दिखाइए कि अधिकतम वृद्धि दर तब होती है जब जनसंख्या संतुलन साइज़ के आधे के बराबर होती है, अर्थात, जब जनसंख्या $\left(\frac{a}{2b}\right)$ होती है।

4. (a) परतंत्र चर की परिवर्तन-विधि द्वारा निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए : 4

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)xy = x^2e^x.$$

(b) चर-पृथक्करण विधि द्वारा $u_{xt} = e^{-t}\cos x$ को हल कीजिए जहाँ 3

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = 0$$

(c) हल कीजिए : 3

$$\sqrt{p} - \sqrt{q} + 3x = 0.$$

5. (a) हल कीजिए : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x - y$. 3

(b) साधारण अवकल समीकरण 3

$y\,dx + (xy + x - 3y)\,dy = 0$ को रैखिक रूप में लिखिए और फिर इसका हल प्राप्त कीजिए।

(c) प्राचल विचरण विधि से निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए : 4

$(D^2 - 2D)y = e^x \sin x.$

6. (a) समीकरण 3

$x(1+q)p = (y+z)q$

के लिए चार्पिट समीकरण लिखिए और केवल q और $x$ को सम्मिलित करने वाले युग्म के संगत हल प्राप्त कीजिए।

(b) हल कीजिए : $y + px - x^4p^2 = 0.$ 3

(c) हल कीजिए : 4

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 6\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y \cos x.$$

7. (a) तरंग समीकरण 7

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ को निम्नलिखित प्रतिबंधों के अधीन हल कीजिए :

$u = 0$ जबकि $x = 0$ और $x = \pi$,

$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, जबकि $t = 0$ और $u(x, 0) = x \forall x$ जहाँ $0 < x < \pi$.

(b) समीकरण हल कीजिए : 3

$(D^2 - 1)y = x^2 \cos x$.