No. of Printed Pages : 8 **MTE-02**

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME (BDP)

Term-End Examination

June, 2013

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-02 : LINEAR ALGEBRA

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

---

*Note : Q. No. 7 is **compulsory**. Answer **any four** questions from q. no. **1** to **6**. Calculators are **not** allowed.*

---

1. (a) Prove that the following statements are equivalent for a subset B of a finite dimensional vector space V : 5

   (i) The set B is a basis.

   (ii) The set B generates V and no proper subset B can generate V.

   (iii) The set B is a maximal linearly independent set.

   (b) Consider the basis $B=\{(2, 1, 1), (3, 4, 1), (2, 2, 1)\}$ of $\mathbf{R}^3$. Find the dual basis of B. 5

2. (a) Let $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ be defined by. 5

   $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_2 + x_3, -x_1 + 3x_2 + 4x_3)$

   Find $R(T)$ and Ker T. Also find their dimensions.

(b) Find an invertible matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix where. 5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. (a) Let $A = \{(x,0,0) \mid x, \epsilon \mathbf{R}\}$ and $B = \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\}$ be subspaces of $\mathbf{R}^3$. Show that $\mathbf{R}^3 = A + B$. Is this sum direct ? Justify your answer. 3

(b) Using Gram-Schmidt process, obtain an orthonormal basis of the subspace W of C^3 spanned by $(1,i,0)$ and $(1,2,1-i)$. 4

(c) Let A and B be $n \times n$ matrices. If λ is a non zero eigenvalue of AB, is λ an eigenvalue of BA also ? Justify your answer. 3

4. (a) Solve the system of equations $AX = b$ where. 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -5 & -3 \end{bmatrix} \text{and } b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Also, express b as a linear combination of columns of A.

(b) Let $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Find the adjoint of the matrix. 5

$$\begin{bmatrix} \tan\theta & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -\tan\theta \end{bmatrix}$$

Is the matrix invertible ? If so, find its inverse.

5. (a) Find the orthogonal canonical reduction of the quadratic form $3x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz$. Also, give its principal axes. Find the signature of the quadratic of form as well. 8

(b) Find the direct cosines of the vector $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. 2

6. (a) For $\alpha \in \mathbf{C}$, let $T_\alpha : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ be the linear transformation defined by $T\alpha(v) = \alpha v$. Find the adjoint of $T\alpha$ with respect to the standard inner product on $\mathbf{C}^n$. When will T_α be Hermitian ? When will T_α be Unitary ? Justify your answer. 4

(b) State the Cayley-Hamilton theorem and verify it for the matrix. 4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hence, or otherwise, find A^{-1}.

(c) Check if the vector $(3, -1, 0, -1)$ is in the subspace of $\mathbf{R}^4$ spanned by the vectors $(2, -1, 3, 2)$, $(-1, 1, 1, -3)$ and $(1, 1, 9, -5)$. **2**

7. Which of the following statements are true and which are false ? Justify your answer. **10**

(a) If the minimal polynomial of a linear transformation is $x^2 + 2x + 3$, then the linear transformation is invertible.

(b) Eigenvalues of a Hermitian matrix are purely imaginary.

(c) For the binary operator Δ on $\mathbf{R}$ defined by $x \Delta y = x + y - 2$, the identity element is zero

(d) If A is a non zero linear transformation on a vector space V with $A^n = 0$ for some integers $n \geqslant 2$, then A is not diagonalisable.

(e) Any linear transformation from $\mathbf{R}^2$ to $\mathbf{R}^3$ is always one-one.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम (बी.डी.पी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2013

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-02 : रैखिक बीजगणित

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : *प्रश्न संख्या 7 **अनिवार्य** है। प्रश्न संख्या 1 से 6 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर लिखिए। कैलकुलेटरों का प्रयोग करनेकी अनुमति **नहीं** है।*

---

1. (a) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित कथन परिमित विम सदिश समष्टि V के उपसमुच्चय B के लिए तुल्य हैं : 5

(i) समुच्चय B आधार है

(ii) समुच्चय B, V जनित करता है और B का कोई भी उचित उपसमुच्चय V का जनित कर सकता है।

(iii) समुच्चय B उच्चिष्ठ रैखिकतः स्वतंत्र समुच्चय है।

(b) $\mathbf{R}^3$ का आधार $B = \{(2, 1, 1), (3, 4, 1), (2, 2, 1)\}$ लीजिए। B का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए। 5

2. (a) मान लीजिए $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $T\ (x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_2 + x_3 - x_1 + 3x_2 + 4x_3)$ द्वारा परिभाषित है। $R(T)$ और Ker T ज्ञात कीजिए। उनकी विमाएँ भी ज्ञात कीजिए। 5

(b) ऐसा व्युत्क्रमणीय आव्यूह P ज्ञात कीजिए जिसके लिए $P^{-1}AP$ एक विकर्ण आव्यूह है, जहाँ **5**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. (a) मान लीजिए $A = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbf{R}\}$ और $B = \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\}$ $\mathbf{R}^3$ की उपसमष्टियाँ हैं। दिखाइए कि $\mathbf{R}^3 = A+B$ क्या यह अनुलोम योग है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। **3**

(b) ग्राम-शिमट प्रक्रिया से $(1, i, 0)$ और $(1, 2, 1-i)$ द्वारा विस्तारित $\mathbf{C}^3$ की उपसमष्टि W का प्रसामान्य लंबित आधार प्राप्त कीजिए। **4**

(c) मान लिजिए A और B, $n \times n$ आव्यूह हैं। यदि λ, AB का शून्येतर आइगेनमान हैं, तब क्या λ, BA का भी आइगेनमान है? अपने उत्तर पुष्टि कीजिए। **3**

4. (a) निकाय $AX = b$ को हल कीजिए, जहाँ **5**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ -2 & -5 & -3 \end{bmatrix} \text{ और } b = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

b को A के स्तंभों के एकघात संचय के रुप में भी व्यक्त कीजिए।

(b) मान लीजिए $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ निम्नलिखित आव्यूह का सहखंडज ज्ञात कीजिए। 5

$$\begin{bmatrix} \tan\theta & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -\tan\theta \end{bmatrix}$$

क्या यह व्यूह व्युत्क्रमणीय है ? यदि है तो इसका प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

5. (a) द्विघाती समघात $3x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2yz$ का लांबिक विहित समानयन ज्ञात कीजिए। इसके मुख्य अक्ष भी ज्ञात कीजिए। द्विघाती समघात का चिन्हक भी ज्ञात कीजिए। 8

(b) सदिश $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ की दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए। 2

6. (a) $\alpha \in C$, के लिए, मान लीजिए $T_\alpha : C^n \to C^n$, $T\alpha\,(v) = \alpha v$ द्वारा परिभाषित रैखिक रूपांतरण है। C^n पर मानक आंतर फलन के सापेक्ष T का सहखंडज ज्ञात कीजिए। कब T_α हर्मिटी होगा ? T_α कब ऐकिक होगा ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(b) केली-हेमिल्टन प्रमेय का कथन दीजिए और आव्यूह 4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

के लिए इसे सत्यापित कीजिए। इस प्रकार, या अन्यथा A^{-1} ज्ञात कीजिए।

(c) जाँच कीजिए क्या सदिश $(3, -1, 0, -1)$ सदिशों $(2, -1, 3, 2)$, $(-1, 1, 1, -3)$ और $(1, 1, 9, -5)$ द्वारा विस्तारित $\mathbf{R}^4$ की उपसमष्टि में है? **2**

7. बताईए कि निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए : **10**

(a) यदि रैखिक रूपांतरण का निम्निष्ठ बहुपद $x^2 + 2x + 3$ है, तब रैखिक रूपांतरण व्युत्क्रमणीय होगा।

(b) हर्मिटी आव्यूह के आइगेनमान शुद्धत अधिकल्पित है।

(c) $x \, \Delta \, y = x + y - 2$ द्वारा परिभाषित R पर द्विआधारी संक्रिया Δ के लिए तत्समक अवयव शून्य है।

(d) यदि V सदिश समष्टि V पर एक शून्येत्तर रैखिक संकारक है और किसी पूर्णांक संख्या $n \geq 2$ के लिए $A^n = 0$ है तो A विकर्णनीय नहीं है।

(e) $\mathbf{R}^2$ से $\mathbf{R}^3$ तक कोई भी रैखिक रूपांतरण सदा एकैकी होता है।