01421

BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)

Term-End Examination

June, 2012

PHYSICS

PHE-14 : MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS-III

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt **all** questions. The marks for each question are indicated against it. Symbols have their usual meanings.*

1. Attempt *any five* parts : **2x5=10**

(a) Show that the following matrix is hermitian :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Write down the quadratic form of the following matrix :

$$\begin{pmatrix} a^2 & -ab \\ -ab & b^2 \end{pmatrix}$$

(c) Show that $f(z) = z^2$ is analytic throughout the complex plane.

(d) Vector C_k is expressed in terms of vector A_i and Bj by the following relation.

$Ck = \epsilon_{i\,j\,k}\, A_i\, B_j$ where $\epsilon_{i\,j\,k}$ is a totally antisymmetric tensor and $i\,j\,k = 1, 2, 3$. Write the expression for C_3.

(e) Obtain the residue of $\dfrac{e^{az}}{(z-a)^2}$ at $z = a$.

(f) Determine the Laplace trnasform of $t\, e^{at}$

(g) Obtain the Fourier cosine transform of the function :

$$f(x) = C \qquad 0 < x < \pi/2$$

$$= 0 \qquad x > \frac{\pi}{2}$$

Where C is a constant.

(h) Using the recurrence relation for Besssel functions, show that :

$$\frac{n}{x} J_n(x) - J_n'(x) = J_{n+1}(x)$$

$$J_1(x) = -J_0'(x)$$

2. Attempt *any two* parts :

(a) Determine the eigen values and eigen vectors of the following matrix. 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) (i) Show that the set of real numbers form a group under addition. **3**

(ii) State the symmetries of an equilateral triangle. **2**

(c) Show that the Kronecker delta function is a mixed tensor of rank 2. **5**

3. Attempt *any two* parts : **5x2=10**

(a) Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx$

(b) Evaluate $\oint_{c} \frac{3Z}{(Z^2 + 9)}$ over the circle $|Z| = 4$.

(c) Obtain the Taylor series expansion of sinz about $z = \pi/2$.

4. Attempt *any two* parts : **5x2=10**

(a) Find the Fourier transform of the Gaussian function $f(x) = e^{-\alpha^2 x^2}$.

(b) Let $F(s)$ be the Laplace transform of $f(t)$ for $s > a$. Show that $F(s - c)$ is the laplace transform of $f(t) e^{ct}$ for $s > a + c$.

(c) Solve the following differential equation using Laplace's transforms

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$x(0) = x_0$$

$$\frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0} = 0$$

5. Attempt *any one* parts : **10**

(a) Using the representation for Bessel functions

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

Show that $J_1(x) + J_3(x) = \frac{4}{x} J_2 - (x)$.

(b) Using the generating function for Legendre polynomials

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

Show that :

$(2n+1)xPn(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)$.

विज्ञान स्नातक (बी.एससी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2012

भौतिक विज्ञान

पी.एच.ई.-14 : भौतिकी में गणितीय विधियाँ-III

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : ***सभी*** *प्रश्न करें। प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सामने दिए गए हैं। प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं।*

---

1. ***कोई पाँच भाग*** करें : **2x5=10**

(a) सिद्ध करें कि निम्नलिखित आव्यूह हर्मिटी है :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

(b) निम्नलिखित आव्यूह को द्विघाती समधात रूप में लिखें :

$$\begin{pmatrix} a^2 & -ab \\ -ab & b^2 \end{pmatrix}$$

(c) सिद्ध करें कि $f(z) = z^2$ पूरे सम्मिश्र समतल पर वैश्लेषिक है।

(d) सदिश C_k को सदिश A_i और B_j के पदों में निम्नलिखित संबंध द्वारा निरूपित किया जाता है :

$C_k = \epsilon_{ijk} A_i B_j$ जहाँ ϵ_{ijk} एक पूर्णतया प्रतिसममित टेन्सर है और $i\,j\,k = 1, 2, 3$ C_3 का व्यंजक लिखें।

(e) $z = a$ पर $\dfrac{e^{az}}{(z-a)^2}$ के अवशिष्ट प्राप्त करें।

(f) $t\,e^{at}$ का लाप्लास रूपांतर परिकलित करें।

(g) फलन :

$$f(x) = C \qquad 0 < x < \pi/2$$

$$= 0 \qquad x > \frac{\pi}{2}$$

का फ़ूरिये कोसाइन रूपांतर प्राप्त करें, जहाँ C एक स्थिरांक है।

(h) बेसल फलन के पुनरावृत्ति संबंध

$\frac{n}{x} J_n(x) - J_n'(x) = J_{n+1}(x)$ का उपयोग कर

सिद्ध करें कि : $J_1(x) = -J_0'(x)$

2. ***कोई दो भाग*** करें :

(a) निम्नलिखित आव्यूह $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ के आइगेन मान और आइगेन सदिश प्राप्त करें। 5

(b) (i) सिद्ध करें कि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय योग के अधीन समूह होता है। 3

(ii) समबाहु त्रिभुज की सभी सममितियाँ बताएँ। 2

(c) सिद्ध करें कि क्रोनेकर डेल्टा फलन कोटि 2 वाला एक मिश्र टेन्सर है। 5

3. ***कोइ दो भाग*** करें : 5x2=10

(a) निम्नलिखित समाकल का मान परिकलित करें :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4} dx$$

(b) निम्नलिखित समाकल का मान परिकलित करें :

$\oint_c \frac{3Z}{(Z^2 + 9)}$ जहाँ C एक वृत्त $|Z| = 4$ है।

(c) $z = \pi/2$ के प्रति sinz का टेलर श्रेणी प्रसार प्राप्त करें।

4. ***कोई दो भाग*** करें : 5x2=10

(a) गाउसीय फलन $f(x) = e^{-\alpha^2 x^2}$ का फ़ूरिये रूपांतर प्राप्त करें।

(b) मान लें कि $S > a$ के लिए $f(t)$ का लाप्लास रूपांतर $F(s)$ है। सिद्ध करें कि $s > a + c$ के लिए $f(t)\, e^{ct}$ का लाप्लास रूपांतर $F(s - c)$ है।

(c) लाप्लास रूपांतर का उपयोग कर निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल करें :

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

$$x(0) = x_0$$

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0$$

5. ***कोई एक भाग*** करें : 10

(a) बेसल फलन के निरूपण :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$

का उपयोग कर सिद्ध करें कि :

$$J_1(x) + J_3(x) = \frac{4}{x} J_2 - (x).$$

(b) लेजान्ड्रे बहुपद के जनक फलन :

$$g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

का उपयोग कर सिद्ध करें कि :

$$(2n+1)xPn(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + n\mathrm{P}_{n-1}(x).$$