No. of Printed Pages : **8**

MTE-9

02251

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2012

MATHEMATICS

MTE-9 : REAL ANALYSIS

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Attempt five questions in all. Q. No.* ***1*** *is compulsory. Do* ***any four*** *questions out of Q. No.* ***2*** *to* ***7****. No calculators are allowed.*

---

1. Which of the following statements are ***true*** and which are ***false*** ? Give reasons for your answer. **10**

(a) 9.09009000900009 ..... is a rational number.

(b) $(2n+1)$ is a monotonically increasing subsequence of the sequence $\langle 2n + (-1)^n \rangle$.

(c) Sum of two discontinuous functions can be continuous.

(d) The second derivative of the function $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ defined by $f(x) = 2|x|$ exists for $x \in \mathbf{R} \rightarrow \{0\}$.

(e) The sum of the series $\sum_{r=1}^{3n} \frac{1}{3n + 2r}$ as $n \rightarrow \infty$ can be calculated by evaluating the integral $\int_0^3 \frac{1}{3 + 2x}\, dx$.

2. (a) Prove that there is no rational number whose square is 5. 4

(b) Find whether the following sequences converge or not 4

(i) $(2+(-1)^n)$ (ii) $\left(\dfrac{4n^3+n}{2n^3+7n}\right)$

(c) Evaluate : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2+x)^{5/4} - 2^{\frac{5}{4}}}{(2+x)^{2/3} - 2^{2/3}}$ 2

3. (a) Show that the series ; 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} \text{ converges.}$$

(b) Let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be defined as 4

$$f(x) = \begin{cases} x^7 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Show that $f''(0)$ exists and is equal to zero.

(c) Write the inequality $\frac{7}{2} < x < \frac{11}{2}$ in the modulus form. 2

4. (a) Check whether the following function is continuous or not : **3**

Also determine the type of discontinuity, if it exists

$$f(x) = \begin{cases} 6x & \text{for } 0 \le x < 5 \\ 7 & \text{for } x = 5 \\ 3x+15 & \text{for } 5 < x \le 10 \end{cases}$$

(b) Test the absolute and conditional convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^3+4}$. **3**

(c) Prove that between any two real roots of $e^{3x} \sin 5x = 10$, there is at least one real root of $e^{3x} \cos 5x + 6 = 0$. **4**

5. (a) Show that the set $]-5, 7] \cap [-7, 5[$ is a neighbourhood of 3. **2**

(b) Show that the function **5**

$f : [2, 3] \to \mathbf{R}$ definedby by :

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ if } x \text{ is rational} \\ 1 \text{ if } x \text{ is irrational} \end{cases} \text{ is}$$

discontinues and not integrable over [2, 3]. Does it imply that every discontinuous function is non-integrable ? Justify your answer.

(c) Examine the function $(x-2)^7 (2x+1)^5$ for extreme value at the point $x = \frac{13}{24}$. **3**

6. (a) Let $f : [-5, 5] \to \mathbf{R}$ be defined by $f(x) = 5[x] + x^5$, where $[x]$ denotes the greatest integer function. Show that this function is integrable. Is this function also differentiable ? Justify your answer. 4

(b) State Weierstrass' M-Test and apply it to show that $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n^8 + x^8}$ converges uniformly for all $x \in \mathbf{R}$. 3

(c) What are the sufficient conditions for a set to have a limit point ? Check whether the following sets have any limit points. 3

(i) $]-1.5, 2.5[$

(ii) The set of odd numbers between 100 and 1000.

7. (a) Show that the function $f :]-1, 1[\to \mathbf{R}$ given by $f(x) = x^3$ is uniformly continuous and deduce that f is continuous at the point zero. 4

(b) Examine whether the equation $x^3 - 12x + 10 = 0$ has a real root in the interval $]-2, 2[$. 3

(c) Identify the intervals in which the function f on $\mathbf{R}$ defined by $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 15$ is both increasing and decreasing. 3

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2012

गणित

एम.टी.ई.-9 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे | *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 1 **अनिवार्य** है। प्रश्न संख्या 2 से 7 में से **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। कैल्कुलेटरों का प्रयोग करने की अनुमती नहीं है।*

---

1. बताइए निम्नलिखित में से कौन से कथन ***सत्य*** हैं और कौन से ***असत्य***। अपने उत्तर का कारण बताइए। **10**

(a) 9.09009000900009 ...... एक परिमेय संख्या है।

(b) $(2n+1)$ अनुक्रम $\langle 2n + (-1)^n \rangle$ का एकदिष्टत: वर्धनाम अनुक्रम है।

(c) दो असंतत फलनों का योग संतत हो सकता है।

(d) $f(x) = 2|x|$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ के दूसरे अवकलज का अस्तित्व सभी $x \in \mathbf{R} \to \{0\}$ के लिए होता है।

(e) जब $n \to \infty$ होता है तब श्रेणी $\sum_{r=1}^{3n} \frac{1}{3n + 2r}$ का योगफल, समाकल $\int_0^3 \frac{1}{3 + 2x} \, dx$ का मूल्यांकन करके परिकलित किया जा सकता है।

2. (a) सिद्ध कीजिए कि ऐसी कोई परिमेय संख्या नहीं है जिसका वर्ग 5 हो। 4

(b) ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित अनुक्रम अभिसरण करता है या नहीं ? 4

(i) $(2+(-1)^n)$ (ii) $\left(\dfrac{4n^3+n}{2n^3+7n}\right)$

(c) निम्नलिखित की जाँच कीजिए : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2+x)^{5/4}-2^{\frac{5}{4}}}{(2+x)^{2/3}-2^{2/3}}$ 2

3. (a) दिखाइए कि श्रेणी $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+3)(2n+5)}$ अभिसरण करती है। 4

(b) मान लीजिए $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ निम्नलिखित रूप से परिभाषित है : 4

$$f(x) = \begin{cases} x^7 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x=0 \end{cases}$$

दिखाइए कि $f''(0)$ का अस्तित्व है और शून्य के बराबर है।

(c) असमिका $\dfrac{7}{2} < x < \dfrac{11}{2}$ को मापंक रूप में लिखिए। 2

4. (a) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित फलन संतत है या नहीं : 3

$$f(x)=\begin{cases} 6x & \text{for} \quad 0 \le x < 5 \\ 7 & \text{for} \quad x=5 \\ 3x+15 & \text{for} \quad 5 < x \le 10 \end{cases}$$

यदि असंततता का अस्तित्व है तब उसके स्वरूप का पता लगाइए।

(b) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^3+4}$ के निरपेक्ष और सप्रतिबंध अभिसरण की जाँच कीजिए। 3

(c) सिद्ध कीजिए कि $e^{3x} \sin 5x = 10$ के किन्हीं दो मूलों के बीच $e^{3x} \cos 5x + 6 = 0$ का कम से कम एक वास्तविक मूल होता है। 4

5. (a) दिखाइए कि समुच्चय $]-5, 7] \cap [-7, 5[$, 3 का प्रतिवेश है। 2

(b) दिखाइए कि $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 1, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : [2, 3] \rightarrow \mathbf{R}$, $[2, 3]$ पर असंतत है और समाकलनीय नहीं है। क्या इसका यह अर्थ निकलता है कि प्रत्येक असंतत फलन असमाकलनीय होता है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 5

(c) बिन्दु $x = \frac{13}{24}$ पर चरम मान के लिए फलन $(x-2)^7 (2x+1)^5$ की जाँच कीजिए। 3

6. (a) मान लीजिए $f : [-5, 5] \to \mathbf{R}$ को $f(x) = 5[x] + x^5$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन को निरूपित करता है। दिखाइए कि यह फलन समाकलनीय है क्या यह फलन अवकलनीय भी है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। 4

(b) वाइएर्स्ट्रास M-परीक्षण का कथन दीजिए और इसे लागू करके दिखाइए कि सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n^8 + x^8}$ अभिसरित है। 3

(c) एक समुच्चय में सीमा बिन्दु होने के लिए पर्याप्त प्रतिबंध क्या हैं? जाँच कीजिए कि निम्नलिखित समुच्चयों में कोई सीमा-बिन्दु हैं या नहीं : 3

(i) $]-1.5, 2.5[$

(ii) 100 से 1000 के बीच की विषय संख्याओं का समुच्चय

7. (a) दिखाइए कि $f(x) = x^3$ द्वारा दिया गया फलन $f :]-1, 1[\to \mathbf{R}$ एकसमानत: संतत है और यह निष्कर्ष निकालिए कि f बिन्दु शून्य पर संतत है। 4

(b) जाँच कीजिए कि समीकरण $x^3 - 12x + 10 = 0$ की अंतराल $]-2, 2[$ के एक वास्तविक मूल होता है। 3

(c) वह अन्तराल पता लगाइए जिनमें $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 15$ द्वारा $\mathbf{R}$ पर परिभाषित फलन f वर्धमान और ह्रासमान दोनों हैं। 3