

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

00051

Term-End Examination

June, 2012

MATHEMATICS

MTE-4 : ELEMENTARY ALGEBRA

Time : 1½ hours

Maximum Marks : 25

Instructions :

1. *Students registered for both MTE-4 & MTE-5 courses should answer both the question papers in two separate answer books entering their enrolment no. course code and course title clearly on both the answer books.*
2. *Students who have registered for MTE-4 or MTE-5 should answer the relevant question paper after entering their enrolment number, course code and course title on the answer book.*

Note : *Question No. 1 is Compulsory. Attempt three more questions from questions No. 2 to 5. Calculators are not allowed.*

1. **Decide which of the following are true or false ?**
If true, furnish a proof and if false, give a counter example. **2x5=10**
 - (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ holds for any subsets A, B and C of a set \cup .

(b) $\frac{1}{x+iy} = x-iy$ wherever x, y are real and

$$i^2 = -1.$$

(c) The quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ have equal roots only if $b^2 = 4ac$.

(d) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, then A^n is the identity matrix

for any five integer $n \geq 2$.

(e) The single equation $2x + 3y = 1$ in two unknowns x and y has infinitely many real solutions.

2. (a) Find the value (n) of x such that 2

$$\begin{vmatrix} 0 & 3x & 2x \\ 3x & 0 & x \\ 2x & x & 0 \end{vmatrix} = 12.$$

(b) Solve the equation. 3

$x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 6x - 21 = 0$, given that two of its roots are equal in magnitude and opposite in sign.

3. (a) Find all the three complex cube roots of 2 2
and express them as $x + iy$ where x and y are real and $i^2 = -1$.

- (b) Solve the following systems by Cramer's rule, if applicable. Otherwise use the Gaussian elimination method. 3
- $$x + 2y + 5z = 23$$
- $$3x + y + 4z = 26$$
- $$6x + y + 7z = 47$$
4. (a) If a, b, c are positive and not all equal, then prove that $(a + b + c)(bc + ca + ab) > 9abc$. 2
- (b) Using the mathematical induction, prove that the product of three consecutive natural numbers is always divisible by 3. 3
5. (a) Prove that $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ holds for any subsets A, B and C of a set U . 2
- (b) An X-ray unit of a hospital has two machines M_1 and M_2 for developing X-ray films. Machine M_1 uses 2 units of power and M_2 uses 1.5 units of power per film developed. The total units of power supplied to these two machines is 300 units per day. The hospital plans for developing 180 films each day. Translate the situation into a system of two linear equations. 2
- (c) The product of two odd numbers is odd. Give the contrapositive of this statement. 1
-

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2012

गणित

एम.टी.ई.-4 : प्रारंभिक बीजगणित

समय : 1½ घण्टे

अधिकतम अंक : 25

निर्देश :

1. जो छात्र एम.टी.ई.-4 और एम.टी.ई.-5 दोनों पाठ्यक्रमों के लिए पंजीकृत हैं, दोनों प्रश्नपत्रों के उत्तर अलग-अलग उत्तर पुस्तिकाओं में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ-साफ लिखकर दें।
2. जो छात्र एम.टी.ई.-4 या एम.टी.ई.-5 किसी एक के लिए पंजीकृत हैं, अपने उसी प्रश्नपत्र के उत्तर, उत्तर-पुस्तिका में अपना अनुक्रमांक, पाठ्यक्रम कोड तथा पाठ्यक्रम नाम साफ-साफ लिखकर दें।

नोट : प्रश्न संख्या 1 करना अनिवार्य है। प्रश्न 2 से 5 में से तीन के उत्तर लिखिए। कैल्कुलेटर का प्रयोग वर्जित है।

1. बताइये, निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से कथन असत्य हैं? यदि सत्य हों तो उसकी उपपत्ति लिखिए, और यदि असत्य हों तो प्रति-उदाहरण दीजिए। 2x5=10
 - (a) किसी समुच्चय U के प्रत्येक उपसमुच्चय A, B, C के लिए $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ होगा।

(b) $\frac{1}{x+iy} = x-iy$, जबकि x, y वास्तविक संख्याएँ तथा

$i^2 = -1$ है।

(c) वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल समान होंगे यदि $b^2=4ac$.

(d) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो किसी भी धनात्मक पूर्णांक $n \geq 2$

के लिए A^n एक एकक आव्यूह होगा।

(e) दो अज्ञात राशियों में एक रैखीय समीकरण $2x+3y=1$ के वास्तविक हलों की संख्या अनन्त है।

2. (a) x के वे मान कीजिए जिसके लिए :

2

$$\begin{vmatrix} 0 & 3x & 2x \\ 3x & 0 & x \\ 2x & x & 0 \end{vmatrix} = 12.$$

(b) समीकरण $x^4-2x^3+4x^2+6x-21=0$ को हल कीजिए जबकि दिया है कि इसके दो मूल संख्या में समान है परन्तु चिन्ह में विपरीत हैं।

3

3. (a) पूर्णांक 2 के तीनों सम्मिश्र घनमूल ज्ञात कीजिए तथा उन्हें $x + iy$ के रूप में व्यक्त कीजिए जबकि x, y वास्तविक संख्याएँ तथा $i^2 = -1$ । 2
- (b) निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को क्रैमस नियम से हल कीजिए यदि यह सम्भव है तो अन्यथा इसे गाउसीय निराकरण विधि से हल कीजिए। 3
- $$x + 2y + 5z = 23$$
- $$3x + y + 4z = 26$$
- $$6x + y + 7z = 47$$
4. (a) यदि a, b, c धनात्मक हैं व समान नहीं हैं तो सिद्ध कीजिए कि $(a + b + c)(bc + ca + ab) > 9abc$ । 2
- (b) गणितीय आगमन सिद्धान्त का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि तीन क्रमागत प्राकृतिक संख्याओं का गुणन हमेशा 3 से विभाजित होगा। 3
5. (a) किसी भी समुच्चय U के किन्हीं तीन उपसमुच्चयों A, B और C के लिए सिद्ध कीजिए की : 2
- $$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

- (b) एक अस्पताल में X-ray फ़िल्म बनाने की दो मशीनें 2
 M_1 और M_2 हैं। एक फ़िल्म बनाने में मशीन M_1
बिजली के 2 मात्रक और मशीन M_2 बिजली के 1.5
मात्रक प्रयोग करती है। प्रत्येक दिन बिजली के 300
मात्रक ही उपलब्ध है। अस्पताल 180 फ़िल्म प्रतिदिन
बनाने का प्रयास करता है। इस परिस्थिति को दो रैखिक
समीकरण निकाय में परिवर्तित कीजिए।
- (c) दो विषम संख्याओं का गुणन भी विषम होता है। इस 1
कथन का प्रतिधनात्मक कथन दीजिए।
-

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2012

MATHEMATICS

MTE-5 : ANALYTICAL GEOMETRY

Time : 1½ hours

Maximum Marks : 25

Note : Question No. 5 is compulsory. Do any three questions from question nos. 1 to 4.

1. (a) Draw an ellipse with eccentricity $\frac{1}{2}$ and a string of length 8 units. What will be the co-ordinates of its vertices and foci ? 2
- (b) Under what conditions on a and b will the asymptotes of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ be perpendicular to each other ? 1
- (c) Obtain the equation of the tangent plane to the conicoid $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ at $(1, -1, 1)$. 2

2. (a) Is the conic $3x^2 + 7xy + 2y^2 + 5x + 5y + 2 = 0$ central? If yes, find its centre. 2

(b) Check whether the cones $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 0$ 3

and $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 0$ are reciprocal or not.

3. (a) Find the equation of a right Circular Cylinder of radius 3 and axis $2x = y = -z$. 2

(b) Find the angle of intersection of the spheres $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 2

(c) Find the intersection of plane $y = 2$ with the 1

ellipsoid $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$

What is the name of the conic to obtained?

4. (a) Give a rough sketch of the Conicoid represented by $3x^2 - 5y^2 + 7z^2 = 1$. Also list 2 properties that you used for sketching it. 2

(b) Show that the four points $(2, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 5)$ and $(2, 1, 5)$ are coplanar. 2

(c) Identify the type of conicoids that are represented by the following equations :

(i) $4x^2 + 3y^2 - 6z^2 = -10$ $\frac{1}{2}$

(ii) $2z^2 + x^2 = 4y$ $\frac{1}{2}$

5. Are the following statements *true* or *false*? Give reasons for your answers. 10

(a) All the planar sections of a paraboloid are parabolas

(b) The direction ratios of the line

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1}, z = 2 \text{ are } 1, -3, 1.$$

(c) Any tangent plane to a cone intersects the cone in only one point.

(d) $y^2 + z^2 = 16$ represents a circle in 3-dimensional space.

(e) If the projection of a line segment AB on another line is the line segment of CD, then $|AB| = |CD|$.

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2012

गणित

एम.टी.ई.-5 : वैश्लेषिक ज्यामिति

समय : 1½ घण्टे

अधिकतम अंक : 25

नोट : प्रश्न संख्या 5 अनिवार्य है। प्रश्न संख्या 2 से 4 में से कोई तीन प्रश्न कीजिए।

1. (a) उत्क्रेन्द्रता $\frac{1}{2}$ और डोरी की लंबाई 8 इकाई वाला एक 2
दीर्घवृत्त बनाएँ। इसके शीर्षों और नाभियों के निर्देशांक
क्या होंगे ?
- (b) a और b के किन प्रतिबंधों के लिए अतिपरवलय 1
 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की अनंतस्पर्शिया एक दूसरे पर लंब
होंगी ?
- (c) (1, -1, 1) पर शांकवज $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ के 2
स्पर्शी समतलों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

2. (a) क्या शांकव $3x^2 + 7xy + 2y^2 + 5x + 5y + 2 = 0$ केन्द्रीय है? यदि है तो इसका केन्द्र ज्ञात कीजिए। 2
- (b) जाँच कीजिए कि शंकु $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 0$ और $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4} = 0$ व्युत्क्रम हैं या नहीं। 3
3. (a) त्रिज्या 3 और अक्ष $2x = y = -z$ वाले लंब वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए। 2
- (b) गोलों $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$ और $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ का प्रतिच्छेद कोण ज्ञात कीजिए। 2
- (c) समतल $y = 2$ के साथ दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ का प्रतिच्छेद ज्ञात कीजिए। प्राप्त शांकव का क्या नाम है? 1
4. (a) $3x^2 - 5y^2 + 7z^2 = 1$ द्वारा निरूपित शांकवज का स्थूल आरेख बनाइए। साथ ही ऐसे दो गुणों को भी लिखिए जिनको आपने इस आरेखण के लिए उपयोग किया। 2
- (b) दिखाइए कि बिन्दु $(2, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 5)$ और $(2, 1, 5)$ समतलीय हैं। 2
- (c) निम्नलिखित समीकरणों द्वारा निरूपित शांकवजों के प्रकारों का पता लगाइए :
 (i) $4x^2 + 3y^2 - 6z^2 = -10$ $\frac{1}{2}$
 (ii) $2z^2 + x^2 = 4y$ $\frac{1}{2}$

5. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य। अपने उत्तरों के कारण भी बताइए। 10

(a) परवलयज के सभी समतलीय परिच्छेद परवलय होते हैं।

(b) रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1}$, $z = 2$ के दिक्-अनुपात $1, -3, 1$ हैं।

(c) किसी भी शंकु का कोई भी स्पर्श तल उस शंकु को केवल एक बिन्दु में प्रतिच्छेद करता है।

(d) $y^2 + z^2 = 16$ त्रिविम समष्टि में वृत्त को निरूपित करता है।

(e) यदि रेखा-खंड AB का एक अन्य रेखा पर प्रक्षेप रेखा-खंड CD है तो, तब $|AB| = |CD|$ होगा।
