

**BACHELOR OF SCIENCE (B.Sc.)****Term-End Examination****June, 2012****MATHEMATICS****MTE-3 : MATHEMATICAL METHODS***Time : 2 hours**Maximum Marks : 50*

---

*Note : Question no. 7 is compulsory. Do any four questions from remaining questions no. 1 to 6. Use of Calculators is not allowed.*

---

1. (a) If  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  is defined by  $f(x) = 4x + 1$  then show that  $f$  is a bijection. Find the formula that defines  $f^{-1}$ . 3
- (b) Obtain  $\int \tan^{-1} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right) dx$ . 3
- (c) The difference of mean and variance of a binomial distribution of 9 trials is 4. Find the probability  $p$  of success of the binomial distribution. Also find the probability of (i) exactly two successes and (ii) less than 2 successes. 4

2. (a) A and B are two events which are independent. The probability that both A and B occur is  $\frac{1}{6}$  and the probability that

neither of them occurs is  $\frac{1}{3}$ . Find the probability of the occurrences of A and B.

- (b) If  $y = e^x + e^{-x}$ , prove that  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 4}$ . 3

- (c) Fit a straight line for regression of Y on X from the following table. 4

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2	1	3	2	4	3	5

Find the value of y when  $x=10$ .

3. (a) Calculate : (i) Quartile deviation and (ii) Mean Deviation from mean for the following data : 4

Marks	No. of Students
15 - 25	4
25 - 35	11
35 - 45	14
45 - 55	18
55 - 65	8
65 - 75	5

- (b) Find two positive numbers x and y such that  $x+y=60$  and  $xy^3$  is maximum. 3

- (c) Find the angle between the planes  $6x - 4y + 2z = 1$  and  $3x + 12y - 9z = 2$ . Also specify the type of the angle obtained. 3
4. (a) Find the unit vector perpendicular to each of the vectors  $a = i + j + k$  and  $b = 2i + 3j - k$ . Find the sine of the angle between the given vectors. 3
- (b) The heights of 6 randomly chosen sailors are (in inches) : 63, 65, 68, 69, 71 and 72. Those of 10 randomly chosen soldiers are 61, 62, 64, 65, 68, 68, 69, 70, 71 and 72. Test the hypothesis that the sailors are on an average taller than the soldiers. Use 5% level of significance. 5  
 [The following values of t may be useful :  $t_{14,0.05} = 1.76$ ,  $t_{15,0.05} = 1.753$ ,  $t_{16,0.05} = 1.746$ ].
- (c) Verify Euler's theorem for the function  $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$ . 2
5. (a) Solve :  $(x^2 + xy) dy = (x^2 + y^2) dx$ . 3
- (b) The diameter, say X, of an electric cable, is assumed to be a continuous random variable with p.d.f. : 4  
 $f(x) = kx(1 - x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , then find :  
 (i) value of k,  
 (ii) c.d.f of X,  
 (iii) Mean and variance of X,  
 (iv)  $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{2}{3}\right)$ .

(c) In an A.P. the first term is 2, the last term is 29 and the sum is 155. Find the number of terms and the common difference. 3

6. (a) If  $x$  is a Poisson variate such that : 3  
 $P(x=2) = 9P(x=4) + 90P(x=6)$ . Find the mean of  $x$ .

(b) A sample of 8 envelopes is taken from letter box of a post office and their weights in grams are found to be 12.1, 11.9, 12.4, 12.3, 11.9, 12.1, 12.4 and 12.1 respectively. Determine an unbiased estimate of (i) population mean and (ii) population variance. 3

(c) Find the sum of 2  
 $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}$ .

(d) Prove that  $\sum_{r=0}^n C(n, r) = 2^n$ , where 2

$C(n, r)$  are the binomial coefficients.

7. State whether the following statements are *true* or *false* giving reasons in support of your answer.

(a) The domain and range of the function  $5 \times 2 = 10$

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \text{ is } \mathbf{R}.$$

- (b) The minimum value of the function  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  is 4.
- (c) If  $P(A) = 0.4$ ,  $P(B) = p$ ,  $P(A \cup B) = 0.6$  and A and B are independent events then  $p = \frac{1}{3}$ .
- (d) The asymptotes parallel to  $x$ -axis of the curve  $y = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$  are  $x = 1$  and  $x = 2$ .
- (e) For a standard normal distribution mean and variance are equal.
-

विज्ञान स्नातक (बी.एस सी.)

सत्रांत परीक्षा

जून, 2012

गणित

एम.टी.ई.-3 : गणितीय विधियाँ

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

**नोट :** प्रश्न संख्या 7 अनिवार्य है। प्रश्न संख्या 1 से 6 में से कोई चार प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. (a) यदि फलन  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 4x + 1$  द्वारा परिभाषित हो तो दिखाइए कि  $f$  एकैकी आच्छादी है।  $f^{-1}$  को परिभाषित करने वाला सूत्र भी प्राप्त कीजिए। 3
- (b) समाकल  $\int \tan^{-1} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right) dx$  प्राप्त कीजिए। 3
- (c) 9 परीक्षणों वाले एक द्विपद-बंटन के माध्य और प्रसरण का अंतर 4 है। सफलता प्राप्त करने की प्रायिकता  $p$  ज्ञात कीजिए। निम्नलिखित प्रायिकताएँ भी ज्ञात कीजिए।  
(i) ठीक दो सफलताएँ प्राप्त करना (ii) दो से कम सफलताएँ प्राप्त करना। 4

2. (a) A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ हैं। दोनों घटनाएँ A और B के घटित होने की प्रायिकता  $\frac{1}{6}$  है और दोनों में से किसी

के भी घटित न होने की प्रायिकता  $\frac{1}{3}$  है। घटना

A और घटना B की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए।

- (b) यदि  $y = e^x + e^{-x}$ , तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - 4}.$$

- (c) निम्नलिखित तालिका में Y पर X समाश्रयण करने वाली सरल रेखा सभंजित कीजिए।

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2	1	3	2	4	3	5

$x=10$  के लिए  $y$  का मान प्राप्त कीजिए।

3. (a) निम्नलिखित आँकड़ों के लिए (i) चतुर्थक विचलन और (ii) माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्राप्त अंक	छात्रों की संख्या
15 - 25	4
25 - 35	11
35 - 45	14
45 - 55	18
55 - 65	8
65 - 75	5

- (b) ऐसी दो घनात्मक संख्याएँ  $x$  और  $y$  ज्ञात कीजिए जिससे कि  $x+y=60$  और  $xy^3$  अधिकतम हो।

- (c) तलों  $6x - 4y + 2z = 1$  और  $3x + 12y - 9z = 2$  के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। प्राप्त किए गए कोण का प्रकार भी बताइए। 3
4. (a) यदि  $a = i + j + k$  और  $b = 2i + 3j - k$  हो तो वह एकक सदिश ज्ञात कीजिए जो सदिशों  $a$  और  $b$  पर लंब हो। दिए गए सदिशों के बीच के कोण का साइन (sine) भी ज्ञात कीजिए। 3
- (b) यादृच्छया चुने गए 6 नाविकों की लंबाई (इंचों में) : 63, 65, 68, 69, 71 और 72 है। यादृच्छया चुने गए 10 सैनिकों की लंबाई 61, 62, 64, 65, 68, 68, 69, 70, 71 और 72 है। इस परिकल्पना की जाँच कीजिए कि नाविक औसतन सैनिकों से लंबे हैं। 5% सार्थकता स्तर का प्रयोग कीजिए। 5
- [ $t$  के निम्नलिखित मान आपके लिए उपयोगी हो सकते हैं।  
 $t_{14,0.05} = 1.76$ ,  $t_{15,0.05} = 1.753$ ,  $t_{16,0.05} = 1.746$ ].
- (c) फलन  $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$  के लिए ऑयलर प्रमेय की जाँच कीजिए। 2
5. (a) हल कीजिए :  $(x^2 + xy) dy = (x^2 + y^2) dx$ . 3
- (b) एक बिजली के तार के व्यास  $X$  को संतत यादृच्छिक चर मान लिया गया है जिसका प्रायिकता बंटन फलन  $f(x) = kx(1-x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , है। निम्नलिखित प्राप्त कीजिए : 4



- (i)  $k$  का मान,
- (ii)  $X$  का संचयी बंटन फलन,
- (iii)  $X$  का माध्य और प्रसरण,
- (iv)  $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{2}{3}\right)$ .

(c) एक समांतर श्रेणी का पहला पद 2 है और अंतिम पद 29 3  
है। यदि इसका जोड़ 155 हो तो इसमें पदों की संख्या  
और सार्व अंतर मालूम कीजिए।

6. (a) यदि  $x$  एक प्वासॉ चर हो जिसके लिए 3  
 $P(x=2) = 9P(x=4) + 90P(x=6)$   $x$  का माध्य ज्ञात  
कीजिए।

(b) एक डाक घर के लेटर बक्स से प्रतिदर्श के रूप में लिए 3  
गए 8 लिफाफों के भार क्रमशः 12.1, 11.9, 12.4,  
12.3, 11.9, 12.1, 12.4 और 12.1 ग्राम हों, तो  
निम्नलिखित के अनभिन्नत आकल ज्ञात कीजिए।

(i) समष्टि माध्य

(ii) समष्टि प्रसरण।

(c) श्रेणी  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}$  2

का योगफल ज्ञात कीजिए।

(d) सिद्ध कीजिए कि  $\sum_{r=0}^n C(n, r) = 2^n$ , जहाँ 2  
 $C(n, r)$  द्विपद गुणांक है।

7. बताइए निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य**। अपने उत्तर के पक्ष में कारण दीजिए। 5x2=10

(a) फलन  $f(x) = \frac{1}{x-2}$  का प्रांत और परिसर  $\mathbf{R}$  है।

(b) फलन  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  का निम्निष्ठ मान 4 है।

(c) यदि  $P(A) = 0.4$ ,  $P(B) = p$ ,  $P(A \cup B) = 0.6$  हों और

A और B स्वतंत्र घटनाएँ हों तो  $p = \frac{1}{3}$ .

(d) वक्र  $y = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$  की  $x$ - अक्ष के समांतर

अनंतस्पर्शियाँ  $x = 1$  और  $x = 2$  हैं।

(e) मानक प्रसामान्य बंटन के माध्य और प्रसरण बराबर होते हैं।

---