No. of Printed Pages : **11**

01711

**MTE-14**

# BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

## Term-End Examination

## June, 2012

## ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS
## MTE-14 : MATHEMATICAL MODELLING

*Time : 2 hours* | *Maximum Marks : 50*

---

***Note :*** *Attempt **any five** questions. All questions carry **equal** marks. Use of calculator is **not** allowed.*

---

**1.** (a) Using dimensional analysis, find the expression for the following non - dimensional numbers. **6**

(i) Reynolds number (depends on $\rho, U, L, \mu$)

(ii) Peclet number (depends on U,L,D)

(iii) Schmidt number (depends on $\mu$, $\rho$, D)

Where $\rho$ is density, U is velocity, $\mu$ is viscosity, D is diffusion coefficient and L is length.

(b) Sulphur dioxide is emitted at a rate of 260 gm/sec. From a stack with an effective height of 80 m. The wind velocity at a stack is 6 m/sec and the atmospheric stability class is D for the overcast day. Determine the ground level concentration along the centre line at a distance 900 m. from a stack, in micro grams per cubic metre. **4**

Hint : ($\sigma_y = 69$ m and $\sigma_z = 29.5$ m are the standard deviations in the vertical direction and cross wind direction respectively).

2. (a) Solve the appropriate pendulum model $L\theta'' + g\theta = 0$, $\theta(0) = \theta_i$ $\theta'(0) = 0$ with $L = 0.9930$ m, $g = 9.8$ m/s$^2$, $\theta_i = 0.15$ rad. 8

Using the substitution $w(t) = \theta'(t)$, resolve the given equation into a system of two equations in $\theta(t)$ and $w(t)$. Discuss the stability of the system and sketch its trajectories.

(b) Explain the difference between continuous and discrete models. Support your answer by suitable example of each type. 2

3. (a) The mathematical model representing the temperature distribution in a homogeneous rod with insulated ends and no internal heat generation is given as follows : 7

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \; 0 < x < L, \; t > 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = 0, \; t > 0, \; \frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0, \; t > 0$$

$T(x, 0) = x$, $0 < x < L$.

where T stands for temperature, K is the coefficient of heat conduction, $x = 0$ and $x = L$ are the two ends of the rod, and t is the time.

Use the method of separation of variables to find T as a function of $x$ and t.

(b) An emigration model with a decaying emigration term $E = \alpha e^{-t}$ is given by the following differential equation **3**

$$\frac{dp}{dt} = KP - \alpha e^{-t}, \alpha > 0$$

where P(t) is the population at time t and K is the growth rate. Find P(t). What is the behaviour of the population as $t \to \infty$?

**4.** (a) Write (i) the diffusion equation with diffusion coefficient K and (ii) the wave equation with wave velocity C. Find the dimension of K and C using these equations. **3**

(b) Consider the following system of differential equations representing a prey and predator population model ; **7**

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y$$

$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

(i) Identify all the critical points of the system of equations given above.

(ii) Obtain the type and stability of these critical points.

5. (a) Suppose the quarterly sale for a particular make of car in Delhi were 2682, 2462 and 3012, respectively. From past data prior to these three data point, a straight line was the fit. The value on the line corresponding to the last observed time is 2988, and the slope is 80. Use exponential smoothing based upon the three observations given above to forecast sales for the quarterly period following these observations using $\alpha = \beta = 0.2$. 5

(b) The model for the number of infectives $y$ of a population affected by the spread of a non -fatal disease results in a differential equation 5

$$\frac{dy}{dt} = y(N\beta - \gamma - \beta y), \; y(0) = y_0$$

where N the total population, $y_0$ the initial infected population, $\gamma$ the recovery rate and $\beta$ the contact rate are all constants. Solve for y and show that the epidemic converges exponentially to the stable state.

6. (a) The mean arrival rate to a service centre is 3 per hour. The mean service time is found to be 10 minutes for service. Assuming Poisson arrival and exponential service time, find 5

(i) the utilisation factor for this service facility.

(ii) the probability of two units in the system.

(iii) the expected number of units in the system.

(iv) the expected time in hours that a customer has to spend in the system.

(b) Consider arterial blood viscosity $\mu = 0.025$ poise. If the length of the artery is 1.5 cm, radius $8 \times 10^{-3}$ cm and $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dynes/cm$^2$ then find the 5

(i) maximum peak velocity of blood, and

(ii) the shear stress at the wall.

7. (a) The short-run cost function for an entrepreneur is $q^3 - 7q^2 + 16q + 90$. Determine the price at which the entrepreneur ceases production in an ideal market. Derive the supply function also. 5

(b) A particle of mass m is thrown vertically upward with velocity $V_o$. The air resistance is $mgCV^2$ where C is a constant and V is the velocity at any time t. Show that the time taken by the particle to reach the highest point is given by : 5

$$= V_o \sqrt{C} = \tan\left(gt \sqrt{C}\right).$$

# स्नातक उपाधि कार्यक्रम

## सत्रांत परीक्षा

## जून, 2012

## ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

## एम.टी.ई.-14 : गणितीय निदर्शन

*समय : 2 घण्टे* *अधिकतम अंक : 50*

***नोट :*** *किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति **नहीं** है।*

1. (a) विभीय विश्लेषण प्रयोग करके निम्नलिखित अविभीय संख्याओं के व्यंजक ज्ञात कीजिए। **6**

   (i) रेनॉल्ड संख्या ( जो $\rho$, U, L, $\mu$ पर निर्भर करती है। )

   (ii) पेक्लेट संख्या ( जो U, L, D पर निर्भर करती है। )

   (iii) शिमट संख्या (जो $\mu$, $\rho$, D पर निर्भर करती है। )

   जहाँ $\rho$ घनत्व है, U वेग है, $\mu$ श्यानता है, D विसरण गुणांक है और L लंबाई है।

   (b) 80 m की एक प्रभावी ऊँचाई वाले एक स्टैक से 260 gm/sec की दर से सल्फर डाई-ऑक्साइड उत्सर्जित हो रही है। स्टैक पर पवन वेग 6 m/sec है और बदली छाए हुए दिन में वायुमंडलीय स्थायित्व वर्ग **4**

D है। माइक्रोग्राम प्रति घन मीटर में स्टैक से 900 m की दूरी पर केन्द्र रेखा के अनुदिश भूमि तल सांद्रण ज्ञात कीजिए।

*संकेत* : ($\sigma_y = 69$ m और $\sigma_z = 29.5$ m क्रमशः ऊर्ध्वाधर दिशा और अनुप्रस्थ पवन दिशा में मानक विचलन है।)

**2.** (a) निम्नलिखित सन्निकट लोलक निदर्श हल कीजिए। **8**

$L\theta'' + g\theta = 0,\ \theta(0) = \theta_i,\ \theta'(0) = 0$

जहाँ $L = 0.9930$ m, $g = 9.8$ m/sec$^2$, $\theta_i = 0.15$ rad.

प्रतिस्थापन $w(t) = \theta'(t)$ का प्रयोग करके, दिए हुए समीकरण को दो समीकरण निकाय $\theta(t)$ तथा $\omega(t)$ में वियोजित कीजिए। निकाय के स्थायित्व पर चर्चा कीजिए और इसके प्रक्षेप पथों का स्केच बनाइए।

(b) संतत और असंतत निदर्शों में अंतर बताइए अपने उत्तर के पक्ष में प्रत्येक प्रकार के लिए एक उपयुक्त उदाहरण दीजिए। **2**

**3.** (a) एक समांग छड़ जिसके सिरे ऊष्मारोधी हों और जिसके अंदर ऊष्मा उत्पन्न नहीं होती है, उसमें तापमान बंटन का गणितीय निदर्श निम्नानुसार निरुपित है : **7**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2},\ 0 < x < L,\ t > 0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0,\ t > 0, \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0, t > 0$$

$$T(x, 0) = x,\ 0 < x < L.$$

जहाँ T तापमान है, K ऊष्मा चालन का गुणांक है, $x = 0$ और $x = L$ छड़ के दो सिरे हैं और t समय है।

$x$ और t के फलन के रूप में T ज्ञात करने के लिए चर पृथक्करण विधि का प्रयोग कीजिए।

(b) क्षयकारी उत्प्रवासन पद $E=\alpha e^{-t}$ वाले उत्प्रवासन निदर्श का अवकल समीकरण : 3

$\frac{dp}{dt}=KP-\alpha\, e^{-t}$, $\alpha > 0$ है जहाँ $P(t)$ समय $t$ पर जनसंख्या है और K वृद्धि दर है। $P(t)$ ज्ञात कीजिए। $t \to \infty$ पर जनसंख्या का व्यवहार बताइए।

4. (a) (i) विसरण गुणांक K वाला विसरण समीकरण और 3

(ii) तरंग वेग C वाला तरंग समीकरण लिखिए। इन समीकरणों की सहायता से R और C की विभाएँ ज्ञात कीजिए।

(b) निम्नलिखित अवकल समीकरण निकाय लीजिए जो शिकार और परभक्षी के जनसंख्या निदर्श को निरुपित करता हो : 7

$$\frac{dx}{dt}=x^2-y \qquad \frac{dy}{dt}=x+y$$

(i) ऊपर दिए गए समीकरण निकाय के सभी क्रांतिक बिन्दु पहचानिए।

(ii) इन क्रांतिक बिन्दुओं के प्रकार और स्थायित्व पर चर्चा कीजिए।

5. (a) मान लीजिए कि दिल्ली में एक कार की तियाही बिक्री क्रमशः 2682, 2462 और 3012, है। पिछले आँकड़ों (इन तीन आँकड़ा बिन्दुओं से पहले) से एक सरल रेखा आसंजित की गई थी। रेखा पर अंतिम प्रेक्षित समय का संगत मान 2988 है, और प्रवणता 80 है। $\alpha=\beta=0.2$ मानकर ऊपर दिए गए तीन प्रेक्षणों के बाद की तिमाही अवधि में होने वाली बिक्री का पूर्वानुमान लगाने के लिए ऊपर दिए गए तीन प्रेक्षणों पर आधारित चरधातांकी मसृणीकरण (smoothing) का प्रयोग कीजिए। 5

(b) अघातक बीमारी के फैलने से प्रभावित होने वाली समष्टि में $y$ संक्रामक व्यक्तियों का निदर्श अवकल समीकरण 5

$$\frac{dy}{dt} = y(N\beta - \gamma - \beta y), \; y(0) = y_0$$

से प्राप्त होता है, जहाँ N कुल समष्टि, $y_0$ प्रारंभिक संक्रमित समष्टि, $\gamma$ ठीक होने की दर और $\beta$ संपर्क दर सभी अचर है। $y$ के लिए हल प्राप्त कीजिए और दिखाइए कि स्थायित्व अवस्था के प्रति महामारी चरघातांकी रूप से अभिसारित होती है।

6. (a) किसी सेवा केन्द्र पर माध्य आगमन दर 3 प्रति घंटा है। माध्य सेवा समय 10 मिनट प्रति सेवा है। प्वासों आगमन और चरघातांकीय सेवा समय की कल्पना करते हुए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए। 5

(i) सेवा सुविधा के लिए उपयोग गुणक,

(ii) प्रणाली में दो इकाइयों की प्रायिकता,

(iii) प्रणाली में इकाइयों की प्रत्याशित संख्या,

(iv) प्रणाली में एक ग्राहक द्वारा घंटों में व्यतीत किया जाने वाला प्रत्याशित समय।

(b) धमनी रक्त श्यानता $\mu = 0.025$ पॉयज है। यदि धमनी की लंबाई 1.5 cm त्रिज्या $8 \times 10^{-3}$cm तथा $P = P_1 - P_2 = 4 \times 10^3$ dyne/cm$^2$ हो, तो : 5

(i) रक्त का अधिकतम शिखर वेग, तथा

(ii) दीवार पर अपरुपण प्रतिबल ज्ञात कीजिए।

7. (a) एक उद्यमी का अल्पकालिक लागत फलन $q^3 - 7q^2 + 16q + 90$ है। वह मूल्य निर्धारित कीजिए जिस पर उद्यमी आदर्श बाज़ार में उत्पादन को समाप्त (बंद) कर सके। आपूर्ति फलन भी व्युत्पन्न कीजिए। 5

(b) द्रव्यमान m वाले एक कण को ऊर्ध्वारत: ऊपर की ओर वेग $V_o$ से फेंका जाता है। वायु प्रतिरोध $mgCV^2$ है, जहाँ C एक अचर है तथा V किसी समय t पर वेग है। दिखाइए कि उस कण को सबसे अधिक ऊँचे बिन्दु तक पहुँचने में लगा समय $= V_o \sqrt{C} = \tan\left(gt\sqrt{C}\right)$. से प्राप्त होगा। 5

---