No. of Printed Pages : 8

MTE-10

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

01511

Term-End Examination

June, 2012

MATHEMATICS
MTE-10 : NUMERICAL ANALYSIS

Time : 2 hours | *Maximum Marks : 50*

(Weightage 70%)

Note : *Answer **any five** questions. All computations may be done upto 3 decimal places. Use of calculator is **not** allowed.*

---

1. (a) The polynomial $f(x) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 5x - 7$ is given. Find $f'(2)$ using the synthetic division. **3**

(b) The following table of values is given : **4**

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$y(x)$	1.8054	1.5769	1.2834	0.9483	0.5981

Using the differentiation formula :

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}\left[y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)\right]$$

Find an approximation to $y''(0.4)$.

(c) A table of values is to be constructed for the function $f(x) = (1+x)^5$ on [1, 2]. If the linear interpolation is to be used on this table of values, find the largest step size that can be used so that the error is bounded by 5×10^{-4}. **3**

2. (a) Estimate the eigen values of the matrix : **5**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & -13 & 18 \\ 4 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$

Using the Gershgorin bounds. Draw a rough sketch of the region where the eigenvalues lie.

(b) The equation $x^3 - x - 1 = 0$ has a root in the interval $[1, 2]$. Determine a suitable iteration function $\phi(x)$ so that the iteration method $x_{K+1} = \phi(x_K)$, $K = 0, 1,$ ----- converges to the root. Perform two iterations of this method with $x_0 = 1.6$. **5**

3. (a) The iteration method **5**

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}\left[6x_n + \frac{3N}{x_n} - \frac{x_n^3}{N}\right], \; n = 0, 1, \ldots$$

where N is a positive constant, converges to some quantity. Determine this quantity. Also find the rate of convergence of this method.

(b) From the following table, find the number of students who obtained less than 55 marks, using interpolation : **5**

Marks	No. of students
30 - 40	22
40 - 50	32
50 - 60	34
60 - 70	20
70 - 80	12

4. (a) The solution of system of equations : **6**

$$3x - 6y + 2z = 23$$
$$-4x + y - z = -15$$
$$x - 3y + 7z = 16$$

is being attempted by the Jacobi iteration method with the given initial vector. Find the iteration matrix. Hence find whether the iteration scheme converges or diverges.

(b) Obtain the approximate value of $\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ **4**

using simpson's rule with 3 and 5 nodal points. Obtain the improved value using Romberg integration.

5. (a) Find the smallest eigen value and the corresponding eigen vector of the matrix **6**

$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ using 3 iterations of the inverse

power method. Assume the initial approximation to the eigen vector as $[0.4 \ -0.9 \ 0.4]^T$.

(b) Obtain the unique polynomial $P(x)$ of degree 3 or less corresponding to a function $f(x)$, where $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f(1) = 5$, $f'(1) = 4$. **4**

6. (a) The following data values for finding an approximation to $f''(0.3)$ are given : **5**

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	0.091	0.155	0.182	0.171	0.130

Using the central difference formula of $0(h^2)$, find approximations to $f''(0.3)$ with $h=0.2$ and $h=0.1$.

Hence, find an improved estimate using extrapolation.

(b) Obtain an approximation to $y(1.1)$ for the initial problem $y' = x^2 + y^2$, $y(1) = 2$, using **5**

(i) Heun's method (Euler - Cauchy method) of $0(h^2)$ and

(ii) Taylor series method of second order,

with $h=0.1$.

7. (a) Find an interval of unit length which contains the smallest positive root of the equation : **5**

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

Taking the mid-point of this interval as an initial approximation perform two iterations of the Birge - Vieta method.

(b) Solve the initial value problem : **5**

$$y' = \frac{y + 2x}{y + 3x},\ y(1) = 2$$

using third order classical Runge-kutta method. Find y (1.2) taking $h=0.2$.

एम.टी.ई.-10

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2012

गणित

एम.टी.ई.-10 : संख्यात्मक विश्लेषण

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

(कुल का 70%)

नोट : ***किन्हीं पाँच*** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी अभिकलन तीन दशमलव स्थानों तक निकटित कर सकते हैं। कैलकुलेटरों का प्रयोग करना* ***मना*** *है।*

---

1. (a) बहुपद $f(x) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 5x - 7$ दिया गया है। सांश्लेषिक विभाजन का प्रयोग करके $f'(2)$ ज्ञात कीजिए। 3

(b) मानों की निम्नलिखित तालिका प्राप्त है : 4

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$y(x)$	1.8054	1.5769	1.2834	0.9483	0.5981

अवकलन सूत्र :

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}\,[y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)]$$

का प्रयोग करके $y''(0.4)$ का सन्निकटन प्राप्त कीजिए।

(c) अंतराल $[1, 2]$ में फलन $f(x) = (1+x)^5$ के मानों की तालिका बनानी है। यदि मानों की इस तालिका पर रैखिक अंतर्वेशन का प्रयोग किया जाना हो तो वह अधिकतम सोपान लंबाई ज्ञात कीजिए जिसके प्रयोग से प्राप्त त्रुटि 5×10^{-4} द्वारा परिबंध हो। 3

2. (a) गर्शगोरिन परिबंध से आव्यूह : 5

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & -13 & 18 \\ 4 & -10 & 14 \end{bmatrix}$$

के आइगनमान आकलित कीजिए। उस प्रदेश का ग्राफ बनाइए जहाँ आइगनमान स्थित हैं।

(b) समीकरण $x^3 - x - 1 = 0$ का मूल अंतराल [1, 2] में स्थित है। उपयुक्त पुनरावृत्ति फलन $\phi(x)$ ज्ञात कीजिए जिससे कि पुनरावृत्ति विधि $x_{K+1} = \phi(x_k)$, K = 0, 1, ----- मूल की ओर अभिसरित होती हो। $x_0 = 1.6$ से आरंभ करके इस विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। 5

3. (a) पुनरावृत्ति विधि : 5

$$x_{n+1} = \frac{1}{8}\left[6x_n + \frac{3N}{x_n} - \frac{x_n^3}{N}\right], n = 0, 1, ...$$

जहाँ N एक धन अचर है, एक परिमाण की ओर अभिसरित होती है। यह परिमाण ज्ञात कीजिए। इस विधि की अभिसरण दर भी ज्ञात कीजिए।

(b) अंतर्वेशन द्वारा निम्नलिखित सारणी से 55 अंक से कम अंक प्राप्त करने वाले छात्रों की संख्या प्राप्त कीजिए : 5

अंक	छात्रों की संख्या
30 - 40	22
40 - 50	32
50 - 60	34
60 - 70	20
70 - 80	12

4. (a) दिए गए आदि सदिश के साथ जैकोबी पुनरावृत्ति विधि द्वारा समीकरण निकाय : **6**

$3x - 6y + 2z = 23$

$-4x + y - z = -15$

$x - 3y + 7z = 16$

को हल करने का प्रयास किया गया। पुनरावृत्ति आव्यूह ज्ञात कीजिए। अत: ज्ञात कीजिए कि पुनरावृत्ति योजना अभिसरित है या अपसरित।

(b) 3 और 5 उप-अंतराल (आसंधि बिंदु) लेकर सिम्प्सन नियम द्वारा $\int_0^2 \frac{x}{1+x^2} dx$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए। रॉम्बर्ग समाकलन द्वारा मान में सुधार कीजिए। **4**

5. (a) प्रतिलोम घात विधि की 3 पुनरावृत्तियाँ करके आव्यूह : **6**

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$ का लघुतम आइगनमान और संगत आइगनसदिश ज्ञात कीजिए। आइगनसदिश का प्रारंभिक सन्निकटन $[0.4 \ -0.9 \ 0.4]^T$ मान कर चलिए।

(b) फलन $f(x)$ के संगत जहाँ $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f(1) = 5$, $f'(1) = 4$ हैं, घात 3 या उससे कम का अद्वितीय बहुपद $P(x)$ ज्ञात कीजिए। **4**

6. (a) $f''(0.3)$ का सन्निकटन करने के लिए निम्नलिखित आकड़े दिए गए है : 5

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	0.091	0.155	0.182	0.171	0.130

$0(h^2)$ के केन्द्रीय अंतर सूत्र का प्रयोग करके $h=0.2$ और $h=0.1$ के लिए $f''(0.3)$ का सन्निकटन ज्ञात कीजिए। बहिर्वेशन विधि से प्राप्त मान में सुधार कीजिए।

(b) $y(1.1)$ लेकर आदि मान समस्या $y' = x^2 + y^2$, $y(1) = 2$ के लिए विधियों : 5

(i) $0(h^2)$ की हिऊंस विधि (आयॅलर-कॉशी विधि)

(ii) द्वितीय कोटि टेलर श्रेणी विधि, का प्रयोग करके

$h=0.1$ का सन्निकटन प्राप्त कीजिए।

7. (a) एकक लंबाई वाला वह अंतराल ज्ञात कीजिए जो समीकरण $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$ के सबसे छोटे धन मूल को अतंर्विष्ट करता हो। इस अंतराल के मध्य बिंदु को आदि सन्निकटन मान कर बर्ज-विएटा विधि की दो पुनरावृत्तियाँ कीजिए। 5

(b) चिरप्रतिष्ठित तृतीय कोटि रूगें-कुट्टा विधि द्वारा आदि मान समस्या : 5

$$y' = \frac{y + 2x}{y + 3x},\ y(1) = 2$$

का हल प्राप्त कीजिए। $h=0.2$ लेकर $y\ (1.2)$ प्राप्त कीजिए।