

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-1 : CALCULUS

Time : 2 hours

Maximum Marks : 50

(Weightage 70%)

Note : Q. no. 1 is compulsory. Attempt any four questions from Q. no. 2 to Q. no. 7. Calculators are not allowed.

1. State whether the following statements are true or false. Justify your answer. 10

(a) The function f , defined by $f(x) = |x - 1|$, is differentiable at $x = 2$.

(b) The tan function is periodic with period 2π .

(c) The function f , given by $f(x) = \sin x + \cos x$, is

monotonic on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(d) $\frac{d}{dx} \left[\int_{x^2}^4 \sin(t^2) dt \right] = -2x \cos(x^4)$.

(e) Every curve has a critical point.

2. (a) Calculate the approximate value of 3

$$\int_0^6 (2x^2 + 3) dx \text{ by taking 6 equal sub}$$

intervals and applying Simpson's rule.

(b) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$. 4

- (c) Find the domain and range of the function 3

$$f \text{ defined by } f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2}}.$$

3. (a) Find k such that the function f defined by 3

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 0 \\ k - 3x^2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

becomes continuous at $x=0$. Check whether this function is continuous at each point of \mathbb{R} .

- (b) If $y = \sin(m \sin^{-1}x)$, then check whether or not 5

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2-n^2)y_n = 0$$

is true. Also find $y_n(0)$, if it exists.

- (c) Give an example of a 1-1 function from \mathbb{N} to \mathbb{N} , which is not onto, with justification. 2

4. (a) Find $\frac{dy}{dx}$ if $y = (\cos x)^{\ln x} + (\ln x)^{\sin x}$. 4
- (b) Find the area of the region bounded by $y = 2x - x^2$ and $y = x - 2$. 3
- (c) Find the minimum value of f , given by $f(x) = x^2 + 4x + 3$. Check whether f has a maximum. If yes, find it. 3
5. (a) Differentiate $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)$ with respect to $x/2$. 3
- (b) Find $U(P, f)$ and $L(P, f)$, where $f(x) = x^2 + 1$, $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. 3
- (c) If $I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin^n x \, dx$, prove that 4
- $$(1 + n^2) I_n = n(n-1) I_{n-2} \text{ for } n \geq 2.$$
6. Trace the curve $y = 2x(x+1)^2$, stating clearly all the properties used for doing so. 10
7. (a) Verify Lagrange's mean value theorem for f , defined by $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$, on $[0, 4]$. 4
- (b) Find the perimeter of the curve $r = a(1 - \cos \theta)$. 4
- (c) Integrate $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$ 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-1 : कलन

समय : 2 घण्टे

अधिकतम अंक : 50

(कुल का 70%)

नोट : प्र.स.1 करना ज़रूरी है। प्र.सं. 2 से 7 में से कोई चार प्रश्न कीजिए।
कैलकुलेटर्स का प्रयोग करने की अनुमति नहीं है।

1. बताइए निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। अपने उत्तरों की पुष्टि कीजिए। 10
- (a) $f(x) = |x - 1|$ द्वारा परिभाषित फलन f , $x = 2$ पर अवकलनीय है।
- (b) \tan फलन आवर्तक 2π वाला आवर्ती है।
- (c) $f(x) = \sin x + \cos x$ द्वारा परिभाषित फलन f , $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ पर एकदिष्ट है।
- (d) $\frac{d}{dx} \left[\int_{x^2}^4 \sin(t^2) dt \right] = -2x \cos(x^4)$.
- (e) प्रत्येक वक्र का एक क्रांतिक बिन्दु होता है।

2. (a) 6 समान उप-अंतराल लेकर और सिम्पसन नियम को 3

लागू करते हुए $\int_0^6 (2x^2 + 3) dx$ का सन्निकरन मान

ज्ञात कीजिए।

- (b) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$ का मूल्यांकन कीजिए। 4

- (c) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2}}$ द्वारा परिभाषित फलन f का प्रांत और 3

परिसर ज्ञात कीजिए।

3. (a) ऐसा k ज्ञात कीजिए जिससे 3

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 0 \\ k - 3x^2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f , $x=0$ पर संतत बन जाता है।
जाँच कीजिए कि यह फलन \mathbb{R} के प्रत्येक बिंदु पर संतत
है या नहीं।

- (b) यदि $y = \sin(m \sin^{-1} x)$, तब जाँच कीजिए कि 5

$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} + (m^2 - n^2)y_n = 0$
सत्य है या नहीं। इसके आगे, $y_n(0)$ ज्ञात कीजिए, यदि
इसका अस्तित्व है तो।

- (c) पुष्टि सहित N से N तक के ऐसे 1-1 फलन का उदाहरण 2

दीजिए जो आच्छादी नहीं है।

4. (a) यदि $y = (\cos x)^{\ln x} + (\ln x)^{\sin x}$, तब $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 4
- (b) $y = 2x - x^2$ और $y = x - 2$ द्वारा परिबद्ध प्रदेश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 3
- (c) $f(x) = x^2 + 4x + 3$ द्वारा दिए गए f का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए। जाँच कीजिए कि f का उच्चिष्ठ है या नहीं। यदि है, तो वह भी ज्ञात कीजिए। 3
5. (a) $x/2$ के सापेक्ष $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)$ को अवकलित कीजिए। 3
- (b) $U(P, f)$ और $L(P, f)$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $f(x) = x^2 + 1$, $P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ है। 3
- (c) यदि $I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin^n x \, dx$, तब सिद्ध कीजिए कि $n \geq 2$ के लिए $(1 + n^2) I_n = n(n-1) I_{n-2}$ । 4
6. वक्र $y = 2x(x+1)^2$ का अनुरेखण कीजिए। इसका अनुरेखण करने के लिए जिन गुणों का प्रयोग किया गया है, उन्हें भी स्पष्ट रूप से बताइए। 10

7. (a) $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ द्वारा परिभाषित f के लिए $[0, 4]$ पर लग्रॉज माध्य मान प्रमेय को सत्यापित कीजिए। 4
- (b) वक्र $r = a(1 - \cos\theta)$ का परिमाप ज्ञात कीजिए। 4
- (c) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$ को समाकलित कीजिए। 2
-