No. of Printed Pages : 8

MTE-07

BACHELOR'S DEGREE PROGRAMME

Term-End Examination

June, 2012

ELECTIVE COURSE : MATHEMATICS

MTE-07 : ADVANCED CALCULUS

01661

Time : 2 hours *Maximum Marks : 50*

Note : *Q. no. 1 is **compulsory**. Attempt **any four** questions from Q. no. 2 to Q. no. 7.*

1. State whether the following statements are ***true*** or ***false***. Justify your answer : **10**

(a) A real valued function of three variables, which is continuous every where, is differentiable.

(b) $S = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid 0 < x < 1 \right\}$ is bounded below but not above.

(c) The domain of $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$ is $R^2 - \{(0, 0)\}$.

(d) The function defined by $f(x, y, z) = x^2 + 2x - 4$ is integrable on $[0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3]$.

(e) $\{(x, y) / y = 2x\}$ is a domain in R^2.

2. (a) Find the two repeated limits of 4

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3}, \quad x \neq y$$

$$= 0, \qquad x = y$$

as $(x, y) \to (0, 0)$. Also find the simultaneous limit, if it exists.

(b) Find the shortest distance of the curve $y = x^2 + 2$ from the origin. 4

(c) Evaluate $\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$. 2

3. (a) State Euler's theorem for homogeneous functions. Show that 5

$$f(x, y) = e^{x/y} + \tan^{-1}\left(\frac{x - y}{x + y}\right)$$ is a homogeneous function. Verify Euler's theorem for this function.

(b) Find fg and $\frac{f}{g}$, where $f(x, y) = \cos x + \cos y$ 3

and $g(x, y) = \frac{\sin y}{x}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Find domain of the quotient function f/g as well as the product function fg.

(c) Let $a = (0, 1, 0)$, $b = (-5, 3, 0)$, $c = (2, 0, 1)$ be three points in $\mathbf{R}^3$. Find $|a - 2b + 5c|$. 2

4. (a) Evaluate $\iint_T dxdy$, where T is the parallelogram bounded by the lines $x + 2y = 0$, $x + 2y = 4$, $x - y = 2$ and $x - y = -1$. Sketch the region of integration. 5

(b) Find the second order Taylor polynomial for $f(x, y) = e^{2x}\sin y$ at $(0, 0)$. 5

5. (a) Find the Jacobian of $f(x, y, z) = (x^2 + xy + yz, y^2 - z^2, x^3 + z^3)$, and evaluate it at $(1, 1, -1)$. 3

(b) Evaluate by converting to cylindrical coordinates : 5

$$\iiint_S \frac{z}{1 + x^2 + y^2}\, dxdydz, \text{ where,}$$

$S = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, 1 \leq z \leq 4\}$.

(c) Show that the closed sphere with centre $(2, 3, 7)$ and radius 10 in $\mathbf{R}^3$ is contained in the open cube $P = \{(x, y, z) : |x - 2| < 11, |y - 3| < 11, |z - 7| < 11\}$. 2

6. (a) Find the directional derivative of 5

$$f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}, \ (x, y) \neq (0, 0)$$

$$= 0, \qquad (x, y) = (0, 0)$$

at (0, 0) in the direction given by $\theta = \pi/3$. Is the function continuous at (0, 0) ? Justify your answer.

(b) Evaluate : $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy\,dx}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$ 5

Also sketch the region of integration.

7. (a) Show that $F = (\sin xy + xy\cos xy, \ x^2\cos xy)$ is conservative, and evaluate : 5

$$\int_{(0, -1)}^{(2, 1)} (\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2 \cos xy \, dy .$$

(b) Let $f : R^2 \to \mathbf{R}$. When do we say that f is differentiable at $(a, b) \in R^2$? 3

Show that every constant function from R^2 to R is differentiable on R^2.

(c) Evaluate : $\lim_{x \to \infty} \frac{9}{7 - e^{-x}}$. 2

स्नातक उपाधि कार्यक्रम

सत्रांत परीक्षा

जून, 2012

ऐच्छिक पाठ्यक्रम : गणित

एम.टी.ई.-07 : उच्च फलन

समय : 2 घण्टे *अधिकतम अंक : 50*

नोट : *प्रश्न 1 जरुरी हैं। प्रश्न 2 से प्रश्न 7 तक कोई भी चार प्रश्न कीजिए। कैलकुलेटर का प्रयोग करने की अनुमति नहीं हैं।*

---

1. बताइए कि निम्नलिखित कथन **सत्य** हैं या **असत्य**। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए। **10**

(a) तीन चरों वाला एक वास्तविक मान फलन, जो कि सर्वत्र संतत हैं, अवकलनीय होता हैं।

(b) $S = \left\{ x + \frac{1}{x} \mid 0 < x < 1 \right\}$ निम्न परिबद्ध होता हैं, परन्तु उपरि परिबद्ध नहीं होता।

(c) $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$ का प्रांत $R^2 - \{(0, 0)\}$ हैं।

(d) $f(x, y, z) = x^2 + 2x - 4$ से परिभाषित फलन $[0, 1] \times [1, 2] \times [2, 3]$ पर समाकलनीय होता है।

(e) $\{(x, y) / y = 2x\}$, R^2 में एक प्रांत है।

2. (a) $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3}$, $x \neq y$ 4

$= 0, \quad x = y$

की दो पुनरावृत्त सीमाएँ ज्ञात कीजिए जबकि $(x, y) \to (0, 0)$। यदि इसकी युगपत्ति सीमा का अस्तित्व हो, तो उसे भी ज्ञात कीजिए।

(b) मूल बिन्दु से वक्र $y = x^2 + 2$ की लघुतम दूरी ज्ञात कीजिए। 4

(c) $\lim_{x \to \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ का मान निकालिए। 2

3. (a) समघात फलनों के ऑयलर प्रमेय का कथन दीजिए। 5
दिखाइए कि

$f(x, y) = e^{x/y} + \tan^{-1}\left(\frac{x - y}{x + y}\right)$ एक समघात फलन है। इस फलन का ऑयलर प्रमेय सत्यापित कीजिए।

(b) fg तथा $\frac{f}{g}$ ज्ञात कीजिए जहाँ $f(x, y) = \cos x + \cos y$ 3

और $g(x, y) = \frac{\sin y}{x}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ भागफल फलन $\frac{f}{g}$

और गुणनफल फलन fg का प्रांत ज्ञात कीजिए।

(c) मानलीजिए $a=(0,\ 1,\ 0)$, $b=(-5,\ 3,\ 0)$, $c=(2,\ 0,\ 1)$, $\mathbf{R}^3$ में तीन बिन्दु हैं। $|a-2b+5c|$ ज्ञात कीजिए। 2

4. (a) $\iint_T dxdy$ का मान निकालिए, जहाँ T, रेखाओं $x+2y=0$, $x+2y=4$, $x-y=2$ और $x-y=-1$ से परिबद्ध समांतर चतुर्भुज हैं। समाकलन-प्रदेश का स्केच बनाइए। 5

(b) $(0,\ 0)$ पर $f(x,\ y)=e^{2x}\sin y$ का द्वितीय घात टेलर बहुपद ज्ञात कीजिए। 5

5. (a) $f(x,\ y,\ z)=(x^2+xy+yz,\ y^2-z^2,\ x^3+z^3)$ का जैकुबीयन ज्ञात कीजिए और $(1,\ 1,\ -1)$ पर इसका मान ज्ञात कीजिए। 3

(b) बेलनी निर्देशांकों में रूपांतरित करके, 5

$\iiint_S \frac{z}{1+x^2+y^2}\,dxdydz$, जहाँ

$S=\{(x,\ y,\ z)\,|\,1 \le x^2+y^2 \le 3,\ 1 \le z \le 4\}$ का मान निकालिए।

(c) दिखाइए कि $\mathbf{R}^3$ में केन्द्र $(2,\ 3,\ 7)$ और त्रिज्या 10 वाला संवृत गोला विवृत घन $P=\{(x,\ y,\ z) : |x-2|<11,\ |y-3|<11,\ |z-7|<11\}$ में अंतर्विष्ट होता है। 2

6. (a) $\theta = \pi/3$ द्वारा दी गई दिशा में (0, 0) पर 5

$$f(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}, \ (x, y) \neq (0, 0)$$

$$= 0, \qquad (x, y) = (0, 0)$$

का दिक् अवकलज ज्ञात कीजिए। क्या (0, 0) पर यह फलन संतत हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(b) मान निकालिए : $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy\,dx}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$ 5

समाकलन प्रदेश का स्केच भी बनाइए।

7. (a) दिखाइए कि $F = (\sin xy + xy\cos xy, x^2\cos xy)$ संरक्षी है; और 5

$$\int_{(0, -1)}^{(2, 1)} (\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2\cos xy\,dy$$

का मान निकालिए?

(b) मानलीजिए $f : R^2 \to R$ जब हम यह कहते है कि f, (a, b)ϵR^2 पर अवकलनीय हैं। 3

दिखाइए कि R^2 से R तक प्रत्येक अचर फलन, R^2 पर अवकलनीय होता है।

(c) मान निकालिए : $\lim_{x \to \infty} \frac{9}{7 - e^{-x}}$. 2