No. of Printed Pages : 12 **BMTC–133**

BACHELOR OF SCIENCE (GENERAL)/ BACHELOR OF ARTS (GENERAL) (BSCG/BAG)

Term-End Examination

December, 2023

BMTC–133 : REAL ANALYSIS

Time : 3 Hours *Maximum Marks : 100*

Note : *(i) Question No. **1** is compulsory.*

*(ii) Do any **six** questions from Question Nos. **2** to **8**.*

---

1. Which of the following statements are true *or* false ? Give reasons for your answers in the form of a short proof or a counter-example, whichever is appropriate : 2×5=10

(a) The set $\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right): n \in \mathbf{N}\right\}$ admits of an infimum.

(b) $\mathbf{Q}/\mathbf{N}$ is countable.

(c) The equation $x^3 - 3x + 1 = 0$ has a root in the interval [1, 2].

(d) A bounded function which has only two points of discontinuity is not integrable.

(e) The series :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots\ldots..$$

is divergent.

2. (a) Show that $\left(\frac{\cos 2n}{2n}\right)_{n\in\mathrm{N}}$ converges to zero. 5

(b) If $f'(x)$ and $g'(x)$ exist for all $x \in [a, b]$ and $g'(x)$ does not vanish anywhere in $]a, b[$, then prove that :

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(c) - f(a)}{g(b) - g(c)}$$

for some $c \in]a, b[$. 5

(c) State the Inverse Function Theorem. Show that the function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ given by $f(x) = x^3 + 8x - 2$ has an inverse. Find the values of $f^{-1}(y)$ for the values of y corresponding to $x = 1, 2, 3$. 5

3. (a) Find the radius of convergence of the series $\Sigma a_n x^n$, where $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. 4

(b) Let $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ be defined by :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x^2}, & \text{for } x \in (0,1] \\ 0 \quad , & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Show that f' exists, but f' is not Riemann integrable. 6

(c) Show, whether or not, the set :

$$\mathrm{X}=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2} : n \in \mathbf{N}\right\}$$

is closed. 5

4. (a) Using mathematical induction, prove that 9 is a factor of $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ for all $n \in \mathbf{N}$. 5

(b) Check whether or not, the series :

$$\Sigma\left(\frac{2}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{3^n}\right)$$

is convergent. If convergent, find also its sum. 5

(c) Prove that : 5

$$\tan^{-1} x > x - x^3, \text{ if } x > 0.$$

5. (a) Evaluate : 5

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{2n} \frac{n}{(4n+r)^2}$$

(b) Find the limits of the following sequences, if they exist : 5

(i) $\left(\frac{4}{n^2} + \frac{1-2n}{n}\right)_{n\in \mathrm{N}}$

(ii) $\left(\frac{\sin 3n . \cos 4n}{n^2}\right)_{n\in \mathrm{N}}$

(c) Let $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n!}$ for $0 \le x \le \pi$. Show that the series Σf_n converges uniformly on $[0, \pi]$. 5

6. (a) Find the derivative of $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$, $x \in [0, 3]$, if possible. 6

(b) Determine the values of x for which the function f defined by : 5

$$f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 6,\ \forall x \in \mathbf{R}$$

attains a (i) maximum value, and (ii) a minimum value.

(c) Test the following series for convergence : 4

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

7. (a) Check whether or not the sequence $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, defined by : 5

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n + 2}\ \forall n \geq 1$$

and $a_1 = 2$ is convergent.

(b) Examine the function :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{-1}{x}}}, & \text{for } x \neq 0 \\ 1, & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

for continuity at $x = 0$. If not continuous, describe the nature of discontinuity. 5

(c) Check for Riemann integrability of the function f defined on [1, 3] as : 5

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{when } x \text{ is rational} \\ -1, & \text{when } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

8. (a) Establish the equivalence : 5

$$(p \cap q) \cup [\sim p \cup (\sim p \cup q)] \equiv \sim p \cup q$$

(b) Prove that every convergent sequence is bounded. Also prove or disprove its converse. 5

(c) Test the convergence of the series : 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^3 + 1}$$

BMTC–133

बी. एस-सी. (सामान्य)/बी. ए. (सामान्य)

(बी. एस-सी. जी./ बी. ए. जी.)

सत्रांत परीक्षा

दिसम्बर, 2023

बी. एम. टी. सी.–133 : वास्तविक विश्लेषण

समय : 3 घण्टे *अधिकतम अंक : 100*

नोट : *(i) प्रश्न संख्या 1* ***अनिवार्य*** *है।*

(ii) प्रश्न सं. ***2*** *से* ***8*** *तक किन्हीं* **छः** *प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

---

1. निम्नलिखित कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन-से असत्य ? लघु उपपत्ति या प्रति-उदाहरण, जो भी उचित हो, के साथ अपने उत्तरों के कारण बताइए : 2×5=10

(i) समुच्चय $\left\{\left(1+\frac{1}{n^2}\right) : n \in \mathbf{N}\right\}$ का निम्निष्ठ है।

(ii) **Q/N** गणनीय है।

(iii) समीकरण $x^3 - 3x + 1 = 0$ का अंतराल $[1,2]$ में एक मूल है।

(iv) एक परिबद्ध फलन जिसके केवल दो ही असांतत्य बिन्दु हैं, समाकलनीय नहीं हो सकता है।

(v) श्रेणी $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - ....$ अपसारी है।

2. (क) दिखाइए कि $\left(\frac{\cos 2n}{2n}\right)_{n \in \mathrm{N}}$ शून्य पर अभिसरित होता है। 5

(ख) यदि सभी $x \in [a,b]$ के लिए $f'(x)$ और $g'(x)$ का अस्तित्व है, और $g'(x),]a,b[$ पर शून्येतर हैं, तो सिद्ध कीजिए कि किसी $c \in]a,b[$ के लिए : 5

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(c) - f(a)}{g(b) - g(c)}$$

(ग) व्युत्क्रम फलन प्रमेय का कथन लिखिए। दिखाइए कि $f(x) = x^3 + 8x - 2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ का व्युत्क्रम है। $x = 1, 2, 3$ के संगत y के मानों के लिए $f^{-1}(y)$ के मान ज्ञात कीजिए। 5

3. (क) श्रेणी $\Sigma a_n x^n$ की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए, जहाँ $a_n = \frac{n!}{n^n}$ है। 4

(ख) मान लीजिए $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{यदि} \quad x \in (0,1] \\ 0, & \text{यदि} \quad x = 0 \end{cases}$$

दिखाइए कि f' का अस्तित्व है; लेकिन f' रीमान समाकलनीय नहीं है। 6

(ग) दिखाइए कि समुच्चय :

$$\mathrm{X} = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} : n \in \mathbf{N} \right\}$$

संवृत है या नहीं। 5

4. (क) गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ 9 से विभाज्य है। 5

(ख) जाँच कीजिए कि श्रेणी :

$$\sum \frac{2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{3^n}$$

अभिसारी है या नहीं। यदि अभिसारी है, तो इसका योगफल भी ज्ञात कीजिए। 5

(ग) यदि $x > 0$ है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\tan^{-1} x > x - x^3$$

है। 5

5. (क) मान ज्ञात कीजिए : 5

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{2n} \frac{n}{(4n + r)^2}$$

(ख) निम्नलिखित अनुक्रमों की सीमाएँ ज्ञात कीजिए, यदि उनका अस्तित्व हो : 5

(i) $\left(\frac{4}{n^2} + \frac{1 - 2n}{n} \right)_{n \in \mathrm{N}}$

(ii) $\left(\frac{\sin 3n . \cos 4n}{n^2} \right)_{n \in \mathrm{N}}$

(ग) मान लीजिए $0 \le x \le \pi$ के लिए, $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n!}$ है। दिखाइए कि श्रेणी $\Sigma f_n, [0, \pi]$ पर एकसमानतः अभिसारी है। 5

6. (क) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$, $x \in [0, 3]$ का अवकलज ज्ञात कीजिए, यदि यह संभव हो। 6

(ख) x के वह मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए

$$f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 6,\ \forall x \in \mathbf{R}$$

द्वारा परिभाषित फलन f का (i) उच्चिष्ठ मान हो, तथा (ii) निम्निष्ठ मान हो। 5

(ग) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए : 4

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$$

7. (क) जाँच कीजिए कि :

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n + 2}\ \forall n \geq 1$$

और $a_1 = 2$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ अभिसारी है या नहीं। 5

(ख) $x = 0$ पर फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{-1}{x}}}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

के सांतत्य का परीक्षण कीजिए। यदि संतत नहीं है, तो असांतत्य की प्रकृति बताइए। 5

(ग) $[1,3]$ पर परिभाषित फलन f :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{जब } x \text{ परिमेय है} \\ -1, & \text{जब } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

की रीमान समाकलनीयता की जाँच कीजिए। 5

8. (क) तुल्यता $(p \cap q) \cup [\sim p \cup (\sim p \cup q)] \equiv \sim p \cup q$ सिद्ध कीजिए। 5

(ख) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है। साथ ही इसका विलोम सिद्ध या असिद्ध कीजिए। 5

(ग) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^3 + 1}$ के अभिसरण की जाँच कीजिए। 5